การจัดการความรู้

โรงเรียนเตรียมทหาร

แนวทางการพัฒนานักเรียนเตรียมทหารเป็นรายบุคคล

ด้านการศึกษา (กองคณิตศาสตร์)

องค์ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ในการดำเนินการ จัดการเรียนรู้ งป.๕๕
เรื่อง “ระบบจำนวนจริงและฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ชั้นปีที่ ๑
กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษา โรงเรียนเตรียมทหาร

ชื่อองค์ความรู้

ระบบจำนวนจริง ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ

อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไป สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับ

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆทั้งที่อยู่บนแกนพิกัดฉาก และนอกแกนพิกัดฉาก

วัตถุประสงค์

๑. พัฒนาองค์ความรู้ของ นตท. ที่มีผลระดับคะแนนที่ต่ำ
๒. เพิ่มทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์
๓. ส่งเสริมเจตคติที่ดีในกลุ่มสาระวิชาคณิตศาสตร์

หลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑. กำหนดขอบเขตองค์ความรู้ที่นตท. ต้องผ่านการประเมิน
   (องค์ความรู้ที่ นตท. ต้องผ่าน ได้แก่
   ๑. อธิบายความหมายของ อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไป สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆ
   ๒. สามารถแก้อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไปได้
   ๓. สามารถแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ได้
   ๔. สามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณของมุมต่างๆได้)
๒. ประเมินความรู้เดิมในเนื้อหา การแยกตัวประกอบของพหุนาม การแก้อสมการพหุนามดีกรีหนึ่ง การแก้สมการของพหุนาม ปิทาโกรัสและตรีโกณมิติพื้นฐาน โดยใช้ใบงาน
๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องแยกตัวประกอบของพหุนาม การแก้อสมการพหุนามดีกรีหนึ่ง การแก้สมการของพหุนาม ปิทาโกรัสและตรีโกณมิติพื้นฐาน กับ อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไป สมการและอสมการค่า สัมบูรณ์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆ
๔. ผู้สอนอธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตท.ไม่เข้าใจ อย่างละเอียด โดยใช้

   ๔.๑ ใบความรู้ทบทวน

      ๔.๑.๑ เรื่องการแยกตัวประกอบและการแก้อสมการพหุนามดีกรีหนึ่ง

      ๔.๑.๒ การแก้สมการของพหุนาม

      ๔.๑.๓ ปิทาโกรัสและตรีโกณมิติพื้นฐาน

   ๔.๒ ใบความรู้-ใบงานเนื้อหาหลัก

      ๔.๒.๑ อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไป

      ๔.๒.๒ การแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

      ๔.๒.๓ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆ

๔.๓ สื่อการสอน

๔.๓.๑ power point เรื่อง 9 กฎทองคำสำหรับการแก้อสมการกำลังสองและสูงกว่า

๔.๓.๒ power point เรื่อง กฎทองคำในการแก้สมการอสมการค่าสัมบูรณ์

๔.๓.๓ power point เรื่อง การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆ

และ นตท.สามารถทบทวนเนื้อหาวิชาที่เรียนด้วยตัวเอง โดยเข้าไปโหลดสื่อการสอน power point ทั้งสามเรื่องได้ที่ เว็บไซต์ http://www.gotoknow.org/blog/krukanid-kidna/toc

วิธีดำเนินการ

ทำการสอนทุกวันพุธ ระหว่างภาคเรียน ๓ ครั้ง เวลา ๑๙๓๐ – ๒๑๓๐

ครั้งที่	วันที่	เรื่อง	ห้องเรียน
๑	3 ส.ค. 54	การแก้อสมการพหุนามดีกรีสองขึ้นไป	2-18
๒	10 ส.ค. 54	ทดสอบหลังเรียนครั้งที่๑ /การแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์	2-18
๓	17 ส.ค. 54	ทดสอบหลังเรียนครั้งที่๒ /การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ / แบบทดสอบหลังเรียนครั้งที่ ๓ นำกลับไปทำมาส่ง	2-18

การประเมินผล

ประเมินองค์ความรู้ด้วยแบบทดสอบหลังเรียน โดยใช้เวลา ๑๐ นาทีต้นชั่วโมงถัดไป ด้วย

แบบทดสอบหลังเรียนครั้งที่ ๑ เรื่องการแก้อสมการพหุนามดีกรีสองขึ้นไป

แบบทดสอบหลังเรียนครั้งที่ ๒ เรื่องการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

และ แบบทดสอบหลังเรียนโดยให้ไปทำด้วยตัวเองแล้วนำกลับมาส่ง ด้วย

แบบทดสอบหลังเรียนครั้งที่ ๓ เรื่องการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(แต่ละแบบทดสอบต้องได้คะแนนร้อยละ ๘๐ ขึ้นไปจึงถือว่าผ่าน ถ้าได้คะแนนต่ำกว่าร้อยละ ๘๐ ต้องนำเอาแบบทดสอบกลับไปแก้ไขให้ถูกทั้งหมดจึงถือว่าผ่าน)

แหล่งอ้างอิง

๑. เอกสารประกอบการเรียนรู้การสอนซ่อมเสริม

๒. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องจำนวนจริง และฟังก์ชันตรีโกณมิติ

๓. เว็บไซต์ http://www.gotoknow.org/blog/krukanid-kidna/toc

ภาคผนวก

๑. ใบความรู้ทบทวน

๑.๑ เรื่องการแยกตัวประกอบและการแก้อสมการพหุนามดีกรีหนึ่ง

๑.๒ การแก้สมการของพหุนาม

๑.๓ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° **และ** 60°

๒. ใบความรู้เนื้อหาหลัก

๒.๑ อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไป

๒.๒ การแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

๒.๓ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆ

๓. ใบงาน

๓.๑ อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไป

๒.๒ การแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

๓.๓ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่างๆ

แผนการสอนเรื่อง การแก้อสมการพหุนามดีกรีสองขึ้นไป

ขั้นนำ

ครูเขียน ประโยคทั้งสามบนกระดาน

$$x+2\leq 5$$
$$x^2+3x+2>0$$
$$x^3+3x^2+2x\leq 0$$ แล้วถามว่า

๑. นตท.รู้จักประโยคบนกระดานหรือไม่ ใครตอบได้บ้างประโยคทั้งสามบนกระดานเรียกว่าอะไร (อสมการ)
๒. แล้วอสมการทั้งสามแตกต่างกันอย่างไร (ดีกรีของแต่ละพหุนามไม่เท่ากัน)
๓. นตท.สามารถแก้อสมการข้อใดได้บ้าง (ข้อแรก อาจให้ตัวแทน นตท.ออกมาแสดงให้ดู) แล้วอีกสองประโยคต่อมาจะทำอย่างไรดี

ขั้นสอน

อธิบายเพิ่มเติมว่าการแก้อสมการที่ดีกรีสูงขึ้น คือตั้งแต่ดีกรีสองขึ้นไปทำคล้ายสมการคือต้องใช้การแยกตัวประกอบช่วย ถามเพิ่มเติมว่ามี นตท.คนใดแยกตัวประกอบพหุนามยังไม่คล่อง (ถ้ามี นตท.ยกมือ ให้แจกใบความรู้ทบทวนเรื่องการแยกตัวประกอบพหุนาม แล้วครูอธิบายวิธีการทำพร้อมฝึกให้ นตท.ทำแบบฝึกหัดประกอบ) ถ้าไม่มี หรือทบทวนเรียบร้อยให้อธิบายวิธีการแก้อสมการกำลังสอง โดยใช้สื่อการสอน power point เรื่อง 9 กฎทองคำสำหรับการแก้อสมการสองและสูงกว่า พร้อมแจกใบความรู้เนื้อหาหลัก อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไป อธิบายกฎทองคำข้อที่ 1 อธิบายจบ ถาม นตท.ว่าคนใดไม่เข้าใจ (ถ้ามี อธิบายเพิ่มเติม) แล้วให้จดตัวอย่างที่ยกพร้อมทำแบบฝึกหัดประกอบในแต่ละหัวข้อ อาจเรียกออกมาทำให้ดูที่กระดาน ทำเช่นนี้จนจบ กฎทองคำข้อที่9 และทำแบบฝึกชุดที่ 9

ขั้นสรุป

ครูและ นตท.ช่วยกันสรุปวิธีการแก้อสมการดีกรีสองขึ้นไปว่ามีการกี่แบบ แต่ละแบบต้องทำอย่างไรให้แบบฝึกหัด นตท.ไปทำเพิ่มเติม และให้ดูข้อที่มี * ดอกจันทร์หน้าข้อ จะเป็นแนวทางในการทดสอบหลังเรียนในชั่วโมงหน้าก่อนการเรียนการสอนเรื่องต่อไป คือการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

ย้ำ นตท.ว่าสามารถเข้าไปทบทวนเนื้อหาวิชาที่ได้เรียนวันนี้ ได้จากสื่อ power point เรื่อง 9 กฎทองคำสำหรับการแก้อสมการกำลังสองและสูงกว่า ได้ที่ http://www.gotoknow.org/file/krukanid-kidna/view/608884

ใบความรู้ทบทวนเรื่อง การแยกตัวประกอบพหุนาม

การแยกตัวประกอบพหุนาม คือ การเขียนพหุนามนั้นในรูปการคูณกันของพหุนามประกอบ

วิธีการแยกตัวประกอบ   เช่น $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

1. การดึงตัวร่วม   เช่น $3x^2+6x=3x(x+2)$

แบบฝึกหัด จงแยกตัวประกอบแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1) $4a^2b+6ab^2=$

1.2) $12x^3-6x^2+9x$ =

1.3) $3a^2c^5+9abc^2-6adc^3=$

1.4) $(x+y)^2-7x-7y=$

2. ผลต่างกำลังสอง   หน้า^2 - หลัง^2 = (   )(   )

เช่น $x^2-16=(x-4)(x+4)$

แบบฝึกหัด

2.1) $a^2-9=$

2.2) $x^2-1=$

2.3) $y^4-625=$

2.4) $(a+1)^2-1=$

3. .รูป $ax^2 + bx + c$ แยกเป็น2วงเล็บคูณกัน

เช่น $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

แบบฝึกหัด

3.1) $x^2 + 5x + 6 =$

3.2) $x^2 + x - 6 =$

3.3) $2x^2 + x - 6 =$

3.4) $12x^2 - 7x - 20 =$

ใบความรู้-ใบงาน เนื้อหาหลัก อสมการของพหุนามดีกรีสองขึ้นไป

9กฎทองคำสำหรับแก้อสมการกำลังสองและสูงกว่า มีทั้งหมด 9 กฎด้วยกันได้แก่

1.ปักหลักสร้างสรรค์

2.ปักหลักสร้างสรรค์มากกว่าหน่อย

3.เปลี่ยนความคิดชีวิตเปลี่ยน (— ⟶ +)

4.รู้ว่าบวกตัดทิ้ง

5.ทั้งหมดกำลังสองต้องมองให้ดี

6.กำลังจะสูงส่งสักเพียงใดคืนกลับสู่สามัญ

7.หารก็คือคูณแต่...

8.ดูเหมือนง่ายแต่ก็ง่าย

9.สุดยอด

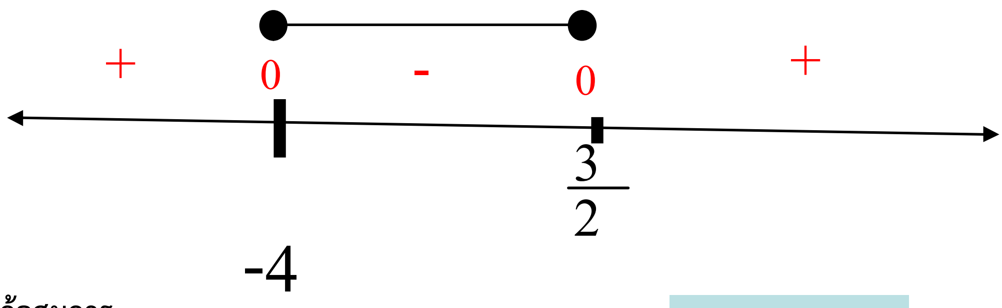
1.ปักหลักสร้างสรรค์

ตัวอย่าง จงแก้อสมการ $2X^2 + 5X \le 12$

วิธีทำ $2X^2 + 5X \le 12$

$$2X^2 + 5X - 12 \le 0$$

$$(2X-3)(X+4) \le 0$$



$X \in [-4, \frac{3}{2}]$

แบบฝึกหัดที่ จงแก้อสมการ

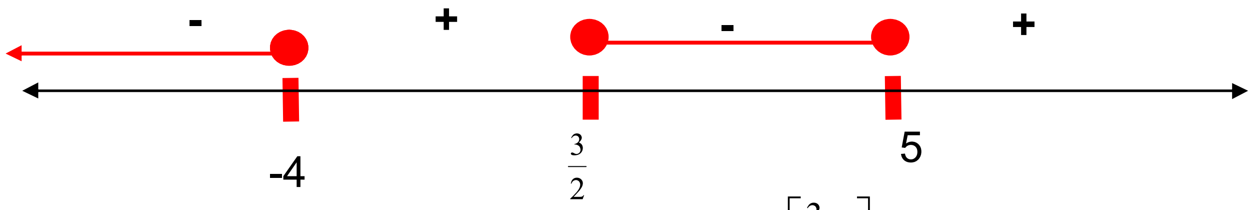
1. $2x^2 + x - 6 \le 0$

2. $12x^2 - 7x - 20 > 0$

2.ปักหลักสร้างสรรค์มากกว่าหน่อย

ตัวอย่าง $(2X-3)(X+4)(x-5) \le 0$

วิธีทำ



เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty,-4] \cup \left[\frac{3}{2},5\right]$

แบบฝึกหัดที่ 1. $(2X-3)(X+4)(x-5) > 0$

2. $(2X-3)(X+4)(x-5) \le 0$

3. เปลี่ยนความคิดชีวิตเปลี่ยน (— ⟶ +)

ตัวอย่าง $(3-2X)(X+4)(5-X) \le 0$

แบบฝึกหัด $(3-2X)(X+4)(5-X) \le 0$

4.รู้ว่าบวกตัดทิ้ง

ตัวอย่าง $(x^2+3)(X+4)(x-5) \le 0$

แบบฝึกหัด $(X-3)(X+5)(x^2+1) < 0$

5.ทั้งหมดกำลังสองต้องมองให้ดี

ตัวอย่าง $(x+3)^2(X+4)(x-5) \le 0$

แบบฝึกหัด 1. $(x+3)^2(X+4)(x-5) < 0$

2. $(X-3)(X+5)(x+1)^2 \ge 0$

3. $(X-3)(X+5)(x+1)^2 > 0$

$(2X-3)(X+4)(x-5) > 0$

6. กำลังจะสูงส่งสักเพียงใดคืนกลับสู่สามัญ

ตัวอย่าง $(x+3)^5(X+4)^6(x-5)^7 \le 0$

แบบฝึกหัด 1. $(X-3)^7(X+5)^8(x+1)^9 \ge 0$

2. $(X-3)^{10}(X+5)^{11}(x+1)^{12} \ge 0$

7. หารก็คือคูณแต่...

ตัวอย่าง $\frac{6x-15}{x-2} \geq 0$

แบบฝึกหัด $\frac{(x-1)^2(x+2)^3}{(x+2)^5(x-2)^4} \geq 0$

8. ดูเหมือนง่ายแต่ก็ง่าย

ตัวอย่าง $\frac{x+1}{x-2} \leq 7$

แบบฝึกหัด $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{1}{x+2}$

9.สุดยอด

ตัวอย่าง $X^2 + 6X - 1 \leq 0$

แบบฝึกหัด $X^2 + 6X + 14 \geq 0$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม เรื่อง การแก้อสมการพหุนามดีกรีสองขึ้นไป

จงแสดงวิธีแก้อสมการต่อไปนี้

1. $2x^2 + x - 6 \leq 0$

2. $2x^2 + x - 6 < 0$

*3. $2x^2 + x - 6 \geq 0$

4. $2x^2 + x - 6 > 0$

5. $(2X-3)(X+2)(x-7) \leq 0$

*6. $(-3X+2)(x-4)(5-x)(5x+2)\le 0$

*7. $x(2X-3)(X+2)(x-7)\le 0$

*8. $(2X-3)^2(X+2)(x-7)\le 0$

9. $(3X+2)^2(X+4)(x-5)(5x+2)^2\le 0$

10. $(2X-3)^3(X+2)^5(x-7)^8\le 0$

11. $(3X+2)^{11}(X+4)^{22}(x-5)^{44}(-5x-2)^{33}\le 0$

12. $\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)}\le 0$

13. $\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x+4)}\le 0$

*14. $\dfrac{(x+2)^2(x-1)}{(x-3)^3(x+4)}\ge 0$

15. $\dfrac{(x+2)^{20}(x-1)^{21}}{(x-3)^{30}(x+4)^{33}}\ge 0$

16. $(2X-3)^3(X+2)^5(x^2+7)\le 0$

17. $\dfrac{(x^2+2)(x-1)}{(x-3)(x^2+4)}\le 0$

*18. $\dfrac{x-1}{x-2}\le\dfrac{x+1}{x+2}$

19. $x+3>\dfrac{x}{x-1}$

*20. $x^2-6x-2\ge 0$

21. $x^2-6x-11<0$

ใบความรู้ทบทวนเรื่อง การแก้สมการและอสมการ

การแก้สมการ

ตัวอย่างที่ 1. $3x+2=5x-4$

ตัวอย่างที่ 2. $1.2x+0.3=x+4$

ตัวอย่างที่ 3. $2+3(x+2)=3-2(2x-1)$

ตัวอย่างที่ 4. $\frac{2}{3}(2x\,\_\,1)+\frac{1}{2}(2-x)=\frac{5}{6}(3x+2)$

ตัวอย่างที่ 5. $\frac{(2x+3)}{3}=\frac{(2-5x)}{2}$

การแก้อสมการ

ตัวอย่างที่ 1. $3x+2\leq 5x-4$

ตัวอย่างที่ 2. $2+3(x+2)\geq 3-2(2x-1)$

ตัวอย่างที่ 3. $5\leq 1-2x\leq 13$

ตัวอย่างที่ 4. $x-1<3x+2\leq 5x+3$

แผนการสอนเรื่อง การแก้สมการพหุและอสมการค่าสัมบูรณ์

ขั้นนำ

ครูทบทวนความรู้เรื่องค่าสัมบูรณ์ เช่น ค่าสัมบูรณ์คืออะไร จำนวนใดที่อยู่ภายใต้ค่าสัมบูรณ์ และผลลัพธ์เมื่อใส่เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์

ขั้นสอน

ครูเขียนสมการและอสมการค่าสัมบูรณ์บนกระดานแล้วบอกนตท.ว่าอะไรคือสมการค่าสัมบูรณ์ อะไรคืออสมการค่าสัมบูรณ์ แล้วให้นตท.สรุปว่าสมการและอสมการค่าสัมบูรณ์คืออะไร(สมการหรือสมการที่ติดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์) แล้วถาม นตท.ว่าเราจะมีวิธีการแก้ หรือหาคำตอบของมันอย่างไร(ปลดค่าสัมบูรณ์ออก) เรามาดูวิธีการปลดค่าสัมบูรณ์โดยใช้สมบัติของค่าสัมบูรณ์ดังนี้ ให้ใช้สื่อการสอน เพาเวอร์พอยต์เรื่องหลักการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ จากเว็บไซต์ http://www.gotoknow.org/file/krukanid-kidna/view/608997
โดยให้นตท.พิจารณาตัวอย่างพร้อมไปกับครู จากนั้นให้ทำแบบฝึกหัดของหลักต่างๆแต่ละวิธีร่วมกันไปด้วย(ใบความรู้-ใบงานเรื่องการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์) จนครบทุกวิธี

ขั้นสรุป

ครูและนตท.ช่วยกันสรุปวิธีการแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์แต่ละแบบต้องทำอย่างไร ให้แบบฝึกหัดนตท.ไปทำเพิ่มเติม และให้ดูข้อที่มี * ดอกจันทร์หน้าข้อ จะเป็นแนวทางในการทดสอบหลังเรียนในชั่วโมงหน้าก่อนการเรียนการสอนเรื่องต่อไป คือฟังก์ชันตรีโกรมิติ

ย้ำ นตท.ว่าสามารถเข้าไปทบทวนเนื้อหาวิชาที่ได้เรียนวันนี้ ได้จากสื่อ power point เรื่อง การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ได้ที่ http://www.gotoknow.org/file/krukanid-kidna/view/608997

ใบความรู้-ใบงาน เนื้อหาหลัก สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์

หลักการที่1 $|x| = a$ จะได้ว่า

ตัวอย่าง 1 จงแก้สมการ $|3x-5| = 8$

ตัวอย่าง 2 จงแก้สมการ $|3x-5| = -8$

ตัวอย่าง 3 จงแก้สมการ $|3x-10| = -3X$

ตัวอย่าง 4 จงแก้สมการ $|3x-5| = 5-3x$

ตัวอย่าง 5 จงแก้สมการ $|3x-5| = 3x-5$

หลักการที่2 $|x| = |y|$ จะได้ว่า

ตัวอย่าง 1 จงแก้สมการ $|4x-2| = |8X-6|$

ตัวอย่าง 2 จงแก้สมการ $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| = 3$

หลักการที่3 $x^2 = |x|^2$

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

ตัวอย่าง จงแก้สมการต่อไปนี้

หลักการที่4 $|x| = \begin{cases} x; x \ge 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $|x+1| + |2-x| = 5$

การแก้อสมการค่าสัมบูรณ์

หลักการที่1 $|x| \le a$ **จะได้ว่า**

ตัวอย่าง 1 จงแก้อสมการ $|x+2| \leq 3$

ตัวอย่าง 2 จงแก้อสมการ $|3x+2| < -5$

ตัวอย่าง 3 จงแก้อสมการ $|3x+2| \leq 0$

ตัวอย่าง 4 จงแก้อสมการ $|3x+2| < 0$

ตัวอย่าง 5 จงแก้อสมการ $|3x+2| < x+1$

หลักการที่2 $|x| \geq a$ **จะได้ว่า**

ตัวอย่าง 1 จงแก้อสมการ $|x+2| \geq 3$

ตัวอย่าง 2 จงแก้อสมการ $|3x+2| > -5$

ตัวอย่าง 3 จงแก้อสมการ $|3x+2| \geq 0$

ตัวอย่าง 4 จงแก้อสมการ $|3x+2| > 0$

ตัวอย่าง 5 จงแก้อสมการ $|3x+2| \geq x+1$

หลักการที่3 $|x| \geq |y|$ จะได้ว่า

ตัวอย่าง 1 จงแก้อสมการ $|x+2| \geq |3X-1|$

ตัวอย่าง 2 จงแก้อสมการ $\dfrac{|3x+2|}{|x+1|} \geq 2$

หลักการที่4 $|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

ตัวอย่าง 1 จงแก้อสมการต่อไปนี้ $|x+1|+|x-2|\le 5$

ตัวอย่าง 2 จงแก้อสมการต่อไปนี้ $\dfrac{|x+2|-1}{|x+3|}>5$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม เรื่อง การแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์

จงแก้สมการและอสมการแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $|3x-2|=5$

*2. $|3x-2|=x+5$

*3. $|3x-2|=2-3x$

*4. $\dfrac{|x+2|-1}{|x+3|}=5$

* 5. $|3x+2|\le 5$

*6. $|3x+2|\ge x+1$

*7. $|x+2|\ge|3X-1|$

*8. $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right|<2$

* 9. $|x-1|+|x+2|\ge 5$

แผนการสอนเรื่อง การหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนฟังก์ชันตรีโกณมิติและการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณของมุม 30°, 45° และ 60° โดยสรุปเป็นตาราง ดังนี้

ค่า / มุม	30	45	60
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

ขั้นสอน

1. ครูให้นักเรียนหาค่าของ $\sin 30°$ บนกระดาน แล้วถามนักเรียนว่า ถ้าค่ามุมเปลี่ยนไป จะสามารถหาค่าได้อย่างไร
2. ครูเรียกถาม นตท.เป็นรายบุคคลเพื่อให้ตอบคำถามที่ครูถาม
3. ครูให้ นตท.ทำแบบฝึกหัดชุดที่ 1

4. ครูแสดงวิธีการหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มากกว่า $90°\ (\frac{\pi}{2})$ ให้ดูเป็นตัวอย่าง (ใบความรู้เนื้อหาหลัก)

5. ครูให้ นตท.หาค่ามุมที่มากกว่า 90 องศา ในแบบฝึกหัดชุดที่ 2

ขั้นสรุป

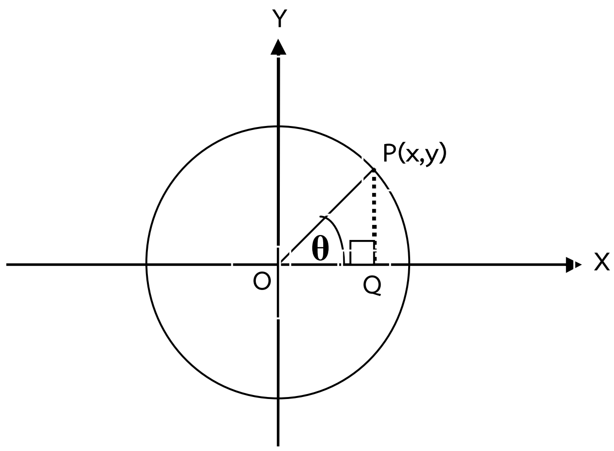
1. ครูให้ นตท.สรุปเกี่ยวกับการหาค่าอัตราส่วนในกรณีมุมอยู่ในควอแดรนต่างๆ ให้แบบฝึกหัดนตท.ไปทำเพิ่มเติม
2. ย้ำ นตท.ว่าสามารถเข้าไปทบทวนเนื้อหาวิชาที่ได้เรียนวันนี้ ได้จากสื่อ power point เรื่องตรีโกณมิติเบื้องต้นได้ที่ http://www.gotoknow.org/media/files/608168

ใบความรู้ทบทวนเรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากอัตราส่วนตรีโกณมิติ สามารถนิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติในรูปของพิกัดจุดในระบบพิกัดฉากได้

กำหนดวงกลมรัศมี 1 หน่วย หรือวงกลม 1 หน่วย (Unit Circle) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด O(0,0) ดังรูป



P(x,y) เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวงกลมของวงกลมหนึ่งหน่วย พิจารณา สามเหลี่ยม PQR มี $\hat{Q} = 90^\circ$ จะได้ว่า

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x$$

จะเห็นได้ว่า พิกัดของจุด P(x,y) นั้น ค่า x = $\cos\theta$ และ y = $\sin\theta$ ทำให้สามารถบอกได้ว่า สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ (x,y) คือค่า $\cos\theta$ และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ (x,y) คือค่า $\sin\theta$ ซึ่งจากพิกัดของ P(x,y) นี้ทำให้ทราบค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ 2 อัตราส่วน จึงนิยามเพิ่มเติม ดังนี้

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

$\cot\theta = \dfrac{\cos\vartheta}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$

ตารางสรุปค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30˚, 45˚ และ 60˚

ค่า / มุม	30	45	60
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

ใบความรู้เนื้อหาหลัก การหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

การหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มากกว่า 90° $(\frac{\pi}{2})$

สามารถทำได้ 2 วิธี คือ

1. การหมุนแขนของมุมรอบจุดศูนย์กลาง โดยมีหลักการทำเป็นขั้นตอนดังนี้

- หมุนแขนของมุม (Radius Vector) ให้ได้มุมตามต้องการ โดยใช้หลักต่อไปนี้

ก. หมุนแขนของมุมเพื่อให้ได้มุมตามต้องการ จะได้ทราบวามุมี่ต้องการอยู่ใน Quadrant ใด ทำให้ทราบเครื่องหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ต้องการ

ข. ดูว่าแขนของมุมที่หมุนไปนั้นทำมุมกับแกน X เท่าใด

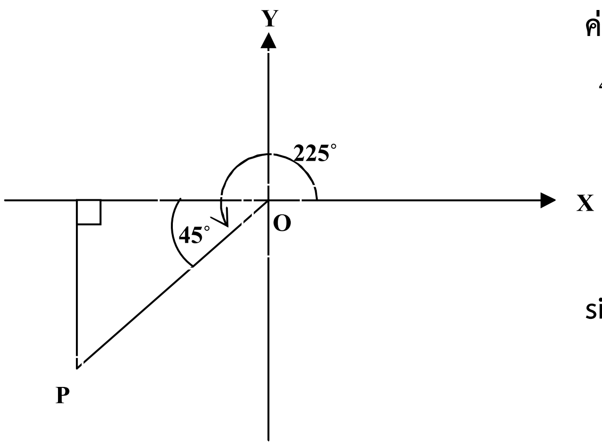
ตัวอย่าง จงหาค่าของ

ก. sin 225° ค. cos(-30°)

ข. tan$(\frac{7\pi}{4})$ ง. tan(-120°)

วิธีทำ

ก. sin 225°

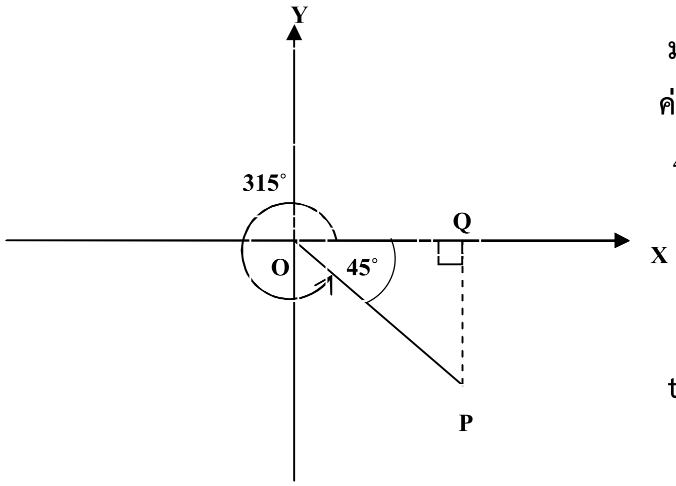


มุม 225° อยู่ใน Q_3

ค่า sin 225° มีค่าเป็นลบ แขนของมุมทำมุม 45° กับแกน X

sin 225° = - sin 45° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ข. tan$(\frac{7\pi}{4})$ = tan$(\frac{7(180^\circ)}{4})$ = tan 315°



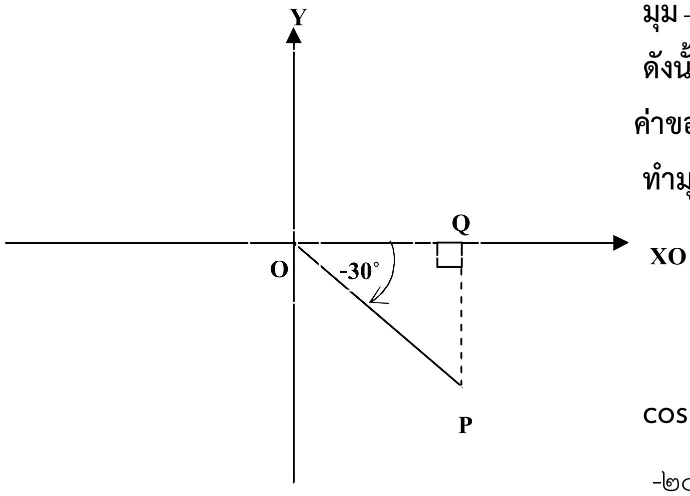
มุม 315° อยู่ใน Q_4

ค่า tan315° มีค่าเป็นลบ แขนของมุมทำมุม 45° กับแกน X

tan$(\frac{7\pi}{4})$ = tan315°

= -tan 45° = -1

ค. cos(-30°)



มุม -30° ต้องหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

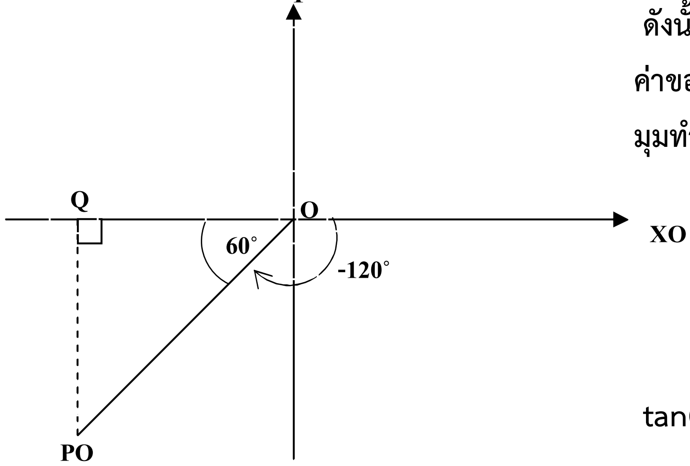
ดังนั้น มุม -30° อยู่ใน Q_4

ค่าของ cos(-30°) มีค่าเป็นบวก แขนของมุมทำมุม 30° กับแกน X

cos(-30°) = cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

-๒๐-

ง. tan(-120°)



มุม -120° ต้องหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ดังนั้น มุม -120° อยู่ใน Q_3

ค่าของ tan(-120°) มีค่าเป็นบวก แขนของมุมทำมุม 60° กับแกน X

tan(-120°) = tan60° = $\sqrt{3}$

2. ใช้วิธีการกระจายให้อยู่ในรูป $90^\circ \pm A\ (\frac{\pi}{2} \pm A)$,

$180^\circ \pm A(\pi \pm A), 270^\circ \pm A(\frac{3\pi}{2} \pm A), 360^\circ \pm A(2\pi \pm A)$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$

แล้วใช้หลักการพิจารณาดังนี้

ก. ดูว่ามุมที่โจทย์ต้องการอยู่ใน Quadrant ใด เพื่อจะได้ทราบว่า ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ต้องการมีค่าเป็นบวกหรือลบ

ข. ดูว่าต้องเปลี่ยนคาอัตราส่วนหรือไม่ โดยดูที่

- ถ้ามุมอยู่ในรูป $180^\circ \pm A(\pi \pm A), 360^\circ \pm A(2\pi \pm A)$ ไม่ต้องเปลี่ยนฟังก์ชัน คือ ถามฟังก์ชันใดตอบฟังก์ชันนั้น

- ถ้ามุมอยู่ในรูป $90^\circ \pm A\ (\frac{\pi}{2} \pm A),\ 270^\circ \pm A(\frac{3\pi}{2} \pm A)$ ต้องเปลี่ยนฟังก์ชันต่อไปนี้

sin $\Longleftrightarrow$ cos

tan $\longleftrightarrow$ cot

sec $\longleftrightarrow$ cosec

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

ก. tan 210° ค. sec 330°

ข. sin $\frac{5\pi}{4}$ ง. cosec $\frac{7\pi}{3}$

<u>วิธีทำ</u> ก. tan 210° = tan$(180^\circ + 30^\circ)$; $180^\circ + 30^\circ$ อยู่ใน Q_3

= - tan 30°

= $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ข. sin $\frac{5\pi}{4}$ = sin $(\pi + \frac{\pi}{4})$; $\pi + \frac{\pi}{4}$ อยู่ใน Q_3

= -sin $\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ค. sec 330° = sec$(270^\circ + 60^\circ)$; $270^\circ + 60^\circ$ อยู่ใน Q_4

= cosec $60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ง. cosec $\frac{7\pi}{3}$ = csc$(2\pi + \frac{\pi}{3})$; $2\pi + \frac{\pi}{3}$ อยู่ใน Q_1

= csc $\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

จ. $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ)$

ฉ. $\cot \frac{11\pi}{3} = \cot(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$

ช. $\sin 225^\circ = \sin(270^\circ - 45^\circ)$

ใบงาน

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

จงหาค่าของ

1.) $2\sin 30^\circ - 6\sin 60^\circ + \sqrt{2}\sin 45^\circ$

2.) $2\tan^2 30^\circ + 4\cos^2 30^\circ - 3\sin^2 30^\circ$

3.) $2\cos 30^\circ + 2\cos 60^\circ - \sqrt{2}\cos 45^\circ$

4.) $3\tan^2\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\cos^2\frac{\pi}{6}$

5.) $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} - 2\cot\frac{\pi}{6} + 1$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

จงหาค่าของ

1. $\sin 120^\circ$
2. $\cos 150^\circ$
3. $\tan 120^\circ$
4. $\sec\frac{5\pi}{6}$
5. $\sin 225^\circ$
6. $\cot\frac{4\pi}{3}$
7. $\operatorname{cosec}(-\frac{\pi}{6})$
8. $\tan 300^\circ$
9. $\cos\frac{13\pi}{6}$
10. $\cos 240^\circ$

แบบทดสอบ

*1. sec $315°$

2. cot $(-120°)$

*3. tan $\frac{7\pi}{4}$

4. sin($-\frac{8\pi}{3}$)

5. cosec $855°$

6. sin $480°$

7. cos($-\frac{\pi}{2}$)

*8. cos $(-1230°)$

9. tan $(-330°)$

10. sin $\frac{23\pi}{6}$

*11. $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}$ + cosec$\frac{\pi}{6}$ - 2cot$\frac{\pi}{6}$ + 1

12. 3tan$^2\frac{\pi}{6}$ + $\frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\csc^2\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\cos\frac{\pi}{6}$

13. cos$^2\frac{\pi}{6}$ - 2cos$^2\frac{\pi}{3}$ - $\frac{3}{4}$sec$^2\frac{\pi}{4}$ - 4sin$^2\frac{\pi}{6}$

องค์ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ในการดำเนินการ จัดการเรียนรู้ งป๕๔

เรื่อง “ เวกเตอร์ ” ชั้นปีที่ ๒

กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษา โรงเรียนเตรียมทหาร

ชื่อองค์ความรู้

เวกเตอร์ ศึกษานิยามการหาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวคเตอร์ และสามารถหาผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวคเตอร์ โคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ และหามุมระหว่างเวกเตอร์ที่กำหนดให้ของเวกเตอร์ได้

วัตถุประสงค์

๑. พัฒนาองค์ความรู้ของนตท. ที่มีผลระดับคะแนนที่ต่ำ

๒. เพิ่มทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

๓. ส่งเสริมเจตคติที่ดีในกลุ่มสาระวิชาคณิตศาสตร์

หลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑. กำหนดขอบเขตองค์ความรู้ที่นตท. ต้องผ่านการประเมิน

๒. ทบทวนความรู้เดิมในเรื่องการหาผลคูณของเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่อง การหาผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวคเตอร์โคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ และหามุมระหว่างเวกเตอร์ที่กำหนดให้ของเวกเตอร์

๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตทไม่เข้าใจ อย่างละเอียด

๕. อาจารย์สอนเนื้อหาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวคเตอร์ของเวกเตอร์ โดยเน้นการแก้โจทย์ปัญหาเป็นหลัก

๖. อาจารย์ให้นตท. ทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง

วิธีดำเนินการ

ทำการสอนวันพุธที่๑๐ สิงหาคม ๒๕๕๔ เวลา ๑๙๓๐ – ๒๑๓๐ น

การประเมินผล

ประเมินองค์ความรู้ด้วยโจทย์ปัญหา

แหล่งอ้างอิง

๑. เอกสารประกอบการเรียนรู้การสอนซ่อมเสริม

๒. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์

ภาคผนวก

๑. ใบงาน

๒. แบบทดสอบเรื่องเวกเตอร์

รายละเอียดหลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑. ขอบเขตองค์ความรู้ที่ นตท. ต้องผ่านการประเมิน ประกอบด้วย

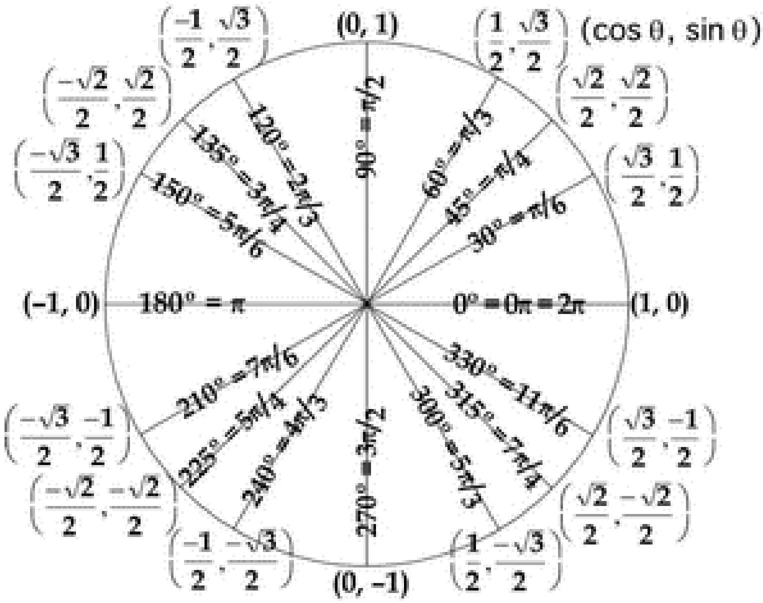
๑. นตท. สามารถบอกนิยามของ ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวคเตอร์ของเวกเตอร์ได้

๒. นตท. สามารถ หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวคเตอร์ของเวกเตอร์ได้

๓. หาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

๔. หามุมระหว่างเวกเตอร์ที่กำหนดให้ได้

๒. ประเมินความรู้เดิมในเรื่องตรีโกณ



จงหาค่าของ

มุมองศา	มุมเรเดียน	$\cos\theta$
0^0	0	
30^0	$\frac{\pi}{6}$	
45^0	$\frac{\pi}{4}$	
มุมองศา	**มุมเรเดียน**	$\cos\theta$
60^0	$\frac{\pi}{3}$	
90^0	$\frac{\pi}{2}$	
120^0	$\frac{2\pi}{3}$	
135^0	$\frac{3\pi}{4}$	
150^0	$\frac{5\pi}{6}$	
180^0	2π	

๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องตรีโกณและหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์

๑. ทำการยกตัวอย่างเวกเตอร์ คือ

ตัวอย่างที่ ให้ $\bar{u} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} - 5\bar{j} + 8\bar{k}$ จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

วิธีทำ จาก $\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = 3(-3) + (-2)(-5) + (-6)(8) = 49$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (8)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

ดังนั้น $49 = 7(7\sqrt{2})\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $\theta = 45^\circ$

๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตท.ไม่เข้าใจ อย่างละเอียดโดยมีแผนการสอนดังนี้

การหาผลคูณเชิงสเกลาร์ และโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์

บทนิยาม ให้ $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3], \bar{b} = [b_1, b_2, b_3]$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ ระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ คือ $\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\bar{a} \bullet \bar{b}$ อ่านว่าเวกเตอร์เอดอตเวกเตอร์บี หรืออ่านสั้นๆ ว่า เอ ดอต บี

ตัวอย่างที่ 1 $\bar{u} = [1,3,5]$ และ $\bar{v} = [0,4,2]$ จงหา $\bar{u} \bullet \bar{v}$

วิธีทำ $\bar{u} \bullet \bar{v} = 1(0)+3(4)+5(2)$

$= 22$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ ในสามมิติ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ แล้ว $\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$

ถ้า $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{a}$ ตั้งฉากกับ $\bar{b}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{a} \bullet \bar{b} = 0$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $\bar{u} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} - 5\bar{j} + 8\bar{k}$ จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

วิธีทำ จาก $\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = 3(-3) + (-2)(-5) + (-6)(8) = 49$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (8)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

ดังนั้น $49 = 7(7\sqrt{2})\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $\theta = 45^\circ$

๕. **อาจารย์สอนเนื้อหาเวกเตอร์** โดยมีแผนการสอนดังนี้

เนื้อหา

เวกเตอร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม ให้ $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3],\ \bar{b} = [b_1, b_2 b_3]$
ผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ คือ $\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1 b_{1+} a_2 b_2 + a_3 b_3$
$\bar{a} \bullet \bar{b}$ อ่านว่า เวกเตอร์ เอ ดอต เวกเตอร์บีหรืออ่านสั้น ๆ ว่า เอ ดอต บี (a dot b)

ตัวอย่างที่ 1 $\bar{u} = [1, 3, 5]$ และ $\bar{v} = [0, 4, 2]$ จงหา $\bar{u} \bullet \bar{v}$

วิธีทำ $\bar{u} \bullet \bar{v} = 1(0) + 3(4) + 5(2)$

$= 22$

ทฤษฎีบท ให้ $\bar{a}, \bar{b}$ และ $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ s เป็นสเกลาร์จะได้ว่า

1. $\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{b} \bullet \bar{a}$
2. $\bar{a} \bullet (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \bullet \bar{b} + \bar{a} \bullet \bar{c}$
3. $s(\bar{a} \bullet \bar{b}) = (s\bar{a}) \bullet \bar{b} = \bar{a} \bullet (s\bar{b})$
4. $\bar{a} \bullet \bar{0} = 0$
5. $\bar{a} \bullet \bar{a} = |\bar{a}|^2$
6. $\bar{i} \bullet \bar{j} = \bar{i} \bullet \bar{k} = \bar{j} \bullet \bar{k} = 0$
7. $\bar{i} \bullet \bar{i} = \bar{j} \bullet \bar{j} = \bar{k} \bullet \bar{k} = 1$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ ในสามมิติ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ แล้ว $\bar{a} \bullet \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$

ถ้า $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{a}$ ตั้งฉากกับ $\bar{b}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{a} \bullet \bar{b} = 0$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $\bar{u} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} - 5\bar{j} + 8\bar{k}$ จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

วิธีทำ จาก $\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$\bar{u} \bullet \bar{v} = 3(-3) + (-2)(-5) + (-6)(8) = 49$

$|\bar{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$

$|\bar{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (8)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

ดังนั้น $49 = 7(7\sqrt{2})\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $\theta = 45^\circ$

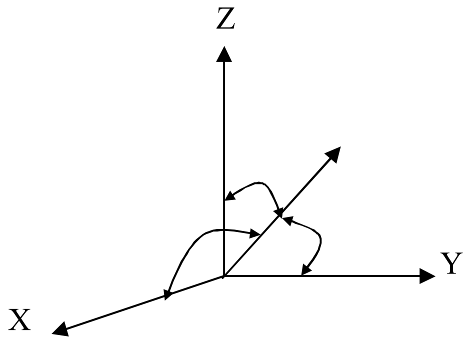
โคไซน์แสดงทิศทาง

ในการกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ สามารถทำได้โดยมุมที่เวกเตอร์ดังกล่าวทำกับแกน X แกน Y และแกน Z

ให้ α, β, λ เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\bar{u} = [a_1, a_2, a_3]$ ทำกับแกนX แกน Y และ แกน Z

เรียก α, β, λ ว่า มุมแสดงทิศทาง(direction angle)

เรียก $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\lambda$ ว่าโคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosine)



บทนิยาม โคไซน์แสดงทิศทาง(dierection cosine) ของเวกเตอร์

$\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ซึ่ง $|\bar{a}| \neq 0$ เทียบกับแกน X,Y,Z ตามลำดับ

คือจำนวนสามจำนวน ซึ่งเรียงตามลำดับดังนี้ $\frac{a_1}{|a|}, \frac{a_2}{|a|}, \frac{a_3}{|a|}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาโคไซน์แสดงเวกเตอร์ $\bar{a} = [6, -8, 10]$ เมื่อเทียบกับแกน X,Y,Z ตามลำดับ วิธีทำ

$|\bar{a}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

ดังนั้นโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ เทียบกับแกน X,Y,Z ตามลำดับ คือ

$\frac{6}{10\sqrt{2}}, \frac{-8}{10\sqrt{2}}, \frac{10}{10\sqrt{2}}$ หรือ $\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

บทนิยาม

เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อ มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงกันข้ามก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทาง เทียบกับแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

กิจกรรม

ขั้นนำ

ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้และทบทวนความรู้เดิมโดยใช้คำถามนักเรียนเกี่ยวกับการหาผลคูณของเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ว่าทำได้อย่างไร หากเราต้องการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์จะทำได้อย่างไรและคิดว่าหาเช่นเดียวกับการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ในสองมิติหรือไม่

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างที่ 1 โดยครูหาผลคูณเชิงสเกลาร์ให้นักเรียนโดยยังไม่บอกนิยามการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ แล้วให้นักเรียนสังเกตวิธีการและความสัมพันธ์ ครูอาจจะยกตัวอย่างอื่นเพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนได้สังเกตหานิยามของผลคูณเชิงสเกลาร์

2. ครูถามนักเรียนโดยการสุ่มเกี่ยวกับวิธีการที่จะทำให้ได้ผลคูณเชิงสเกลาร์ สัก3-4 คน แล้วครูก็ให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ร่วมกัน แล้วครูก็ให้นิยามที่ถูกต้องของการหาผลคูณเชิงสเกลาร์และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3. ครูถามถึงการแสดงทิศทางของเวกเตอร์ว่าสามารถบอกทิศทางของเวกเตอร์ได้อย่างไรบ้าง แล้วครูก็อธิบายนักเรียนว่าการบอกทิศทางของเวกเตอร์สามารถบอกได้อีวิธีหนึ่งโดยอาศัยโคไซน์ เรียกว่า โคไซน์แสดงทิศทาง

4. ครูให้นิยามการหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ เสร็จแล้วยกตัวอย่างที่ 3 ให้นักเรียนลองหาโคไซน์แสดงทอศทางของเวกเตอร์ที่กำหนดให้

5. ครูยกตัวอย่างที่ 2 เกี่ยวกับการหามุมระหว่างเวกเตอร์ โดยให้นักเรียนลองทำก่อน ครูเดินตรวจตามโต๊ะ แล้วให้นักเรียนมาเฉลยหน้าช้อนเรียน ครูให้เพื่อนตรวจความถูกต้องของตนเองกับที่เพื่อนทำ ครูฌลยพร้อมกับอธิบายให้นักเรียนเข้าใจ

6. ครูสุ่มนักเรียนให้มาทำหน้าชั้นเรียนให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบของตนเองกับคำตอบของเพื่อน แล้วครูตรวจสอบความถูกต้องพร้อมกับอธิบายให้นักเรียนเข้าใจ

7. ครูให้นิยามเกี่ยวกับการมีทิศทางเดียวกันของเวกเตอร์โดยอาศัยโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์

สื่อการสอน

1. แบบเรียนคณิตศาสตร์

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. การเรียกถามตอบ	1. นตท. สามารถตอบคำถามได้………
2. ตรวจแบบฝึกหัดจากในแบบเรียน	2. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัดในแบบเรียนได้.......

๖. แบบฝึกหัด ดังนี้

แบบฝึกหัดที่ ๑

1. กำหนดให้ $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จงหา $\bar{u} \bullet \bar{v}$

1.1 $\bar{u} = [-1,0,1], \bar{v} = [0,1,2]$

1.2 $\bar{u} = [3,4,5], \bar{v} = [1,2,3]$

1.3 $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}, \bar{v} = -\frac{1}{2}\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$

2. ให้ $\bar{u} = [x,4,3], \bar{v} = [-1,1,2]$ ถ้า $\bar{u} \bullet \bar{v} = 2$ จงหาค่าของ $|x+2|$

3. ให้ $\bar{v} = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}, \bar{w} = 8\bar{i} - 3\bar{j} - 5\bar{k}$ จงหามุมระหว่าง $\bar{v} \bullet \bar{w}$

4. ให้ $\bar{u} = [2,1,-2], \bar{v} = [-2,3,1]$ และ $\bar{w} = [3,0,2]$
ถ้า $\bar{u} \bullet \bar{a} = 2.\bar{v} \bullet \bar{a} = 5$ และ $\bar{w} \bullet \bar{a} = 5$ จงหา $\bar{a}$

5. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย และ 3 หน่วย ตามลำดับ ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็น 120 องศา จงหา $\frac{1}{3}|\bar{u} + \bar{v}|$

6. ให้ $|\bar{u}| = 10$, $|\bar{v}| = 6$ และ $|\bar{w}| = 14$
ถ้า $\bar{u} - \bar{v} - \bar{w} = \bar{0}$ แล้วจงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

7. ให้ $\bar{u} \bullet \bar{v} = 2$ และ $\bar{w}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$
ถ้า $\bar{u} = 4\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}, \bar{w} = -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ โดยที่ $a + b = 3$
จงหา $|\bar{v}|$

8. ให้ $\bar{u} = [-1,0,1]$
จงหาโคไซน์แสดงทิศทางเทียบแกน X แกน Y และแกน Z แล้วพิจารณาว่า $\bar{u}$ ทำมุมกี่องศาเมื่อเทียบกับแกนทั้ง 3 แกน

9. ให้ $|\bar{u}| = 10, |\bar{v}| = 5$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็น $\frac{2\pi}{3}$ จงหา $|\bar{u} - \bar{v}|$

10. ให้ $\bar{u} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}, \bar{v} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$ จงหา $\left(\frac{\bar{v} \bullet \bar{v}}{\bar{u} \bullet \bar{u}}\right) \bullet \bar{u}$

11. จงพิจารณาว่า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ หรือไม่
11.1) $\bar{u} = [1,-2,3]$, $\bar{v} = [2,1,0]$

11.2) $\bar{u}$ = [1,-1,5], $\bar{v}$ = [2,1,4]

11.3) $\bar{u}$ = [2,-2,1], $\bar{v}$ = [3,-1,-8]

12. ให้ $\bar{u} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2c\bar{k}$

$\bar{v} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$

จงหาค่า c ที่ทำให้ $\bar{u} \bullet \bar{v} = 20$

13. ให้ $\bar{u} = [2, x, y]$ และ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ และ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{w}$

โดย $\bar{v}$ = [2,-1,1], $\bar{w}$ = [-1,4,1] จงหา $|x - y|$

องค์ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ในการดำเนินการ จัดการเรียนรู้ งป.๕๔

เรื่อง “เวคเตอร์สามมิติ” ชั้นปีที่ ๒

กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษา โรงเรียนเตรียมทหาร

ชื่อองค์ความรู้

ศึกษาและฝึกทักษะเกี่ยวกับการเขียนปริมาณเวกเตอร์ เวกเตอร์ที่ขนานกัน เวกเตอร์ที่เท่ากัน นิเสธของเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ การบอกทิศทางของเวกเตอร์ การบวกและการลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ การใช้เวกเตอร์พิสูจน์ในทางเรขาคณิต เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ขนาดของเวกเตอร์ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย พิกัดในสามมิติ โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงบนระนาบ จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง ระยะทางระหว่างจุดสองจุด โปรเจคชันของจุดบนระนาบ เวกเตอร์ในสามมิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ โคไซน์แสดงทิศทาง ผลคูณเชิงเวกเตอร์ พื้นที่และปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันโดยใช้เวกเตอร์

วัตถุประสงค์

๔. พัฒนาองค์ความรู้ของ นตท. ที่มีผลระดับคะแนนที่ต่ำ

๕. เพิ่มทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

๖. ส่งเสริมเจตคติที่ดีในกลุ่มสาระวิชาคณิตศาสตร์

หลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๓. กำหนดขอบเขตองค์ความรู้ที่ นตท. ต้องผ่านการประเมิน

๔. ประเมินความรู้เดิมในเนื้อหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย พิกัดในสามมิติ โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงบนระนาบ จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง ระยะทางระหว่างจุดสองจุด โปรเจคชันของจุดบนระนาบ เวกเตอร์ในสามมิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ โคไซน์แสดงทิศทาง

๓.เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ พื้นที่และปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันโดยใช้เวกเตอร์

๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตท.ไม่เข้าใจ อย่างละเอียด

๕. อาจารย์สอนเนื้อหาฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเน้นการแก้โจทย์ปัญหาเป็นหลัก

๖. อาจารย์ให้ นตท. ทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง

วิธีดำเนินการ

สอนวันพุธที่ ๑๗ สิงหาคม ๒๕๕๔ เวลา ๑๙๓๐ – ๒๑๓๐

การประเมินผล

ประเมินองค์ความรู้ด้วยโจทย์ปัญหา นตท.ต้องสามารถแก้โจทย์ปัญหาที่อาจารย์กำหนดให้ ๓ ข้อขึ้นไปจาก ๕ ข้อ

แหล่งอ้างอิง

๑. เอกสารประกอบการเรียนรู้การสอนซ่อมเสริม

๒. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเวคเตอร์สามมิติ

ภาคผนวก

๓. ใบงาน

๔. แบบทดสอบเรื่องเวคเตอร์สามมิติ

รายละเอียดหลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑.ขอบเขตองค์ความรู้ที่ นตท. ต้องผ่านการประเมิน ประกอบด้วย

๑. นตท.สามารถหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ ได้อย่างถูกต้อง

๒.นตท.สามารถหาพื้นที่และปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันโดยใช้เวกเตอร์ได้อย่างถูกต้อง

๒.ประเมินความรู้เดิมในเรื่องเนื้อหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย พิกัดในสามมิติ โปรเจคชันของส่วนของเส้นตรงบนระนาบ จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง ระยะทางระหว่างจุดสองจุด โปรเจคชันของจุดบนระนาบ เวกเตอร์ในสามมิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ โคไซน์แสดงทิศทาง
โดยให้โจทย์ปัญหาดังนี้

ประเมินเรื่องเวคเตอร์สามมิติ

๑. กำหนด O เป็นจุดกำเนิด จงหา $\overrightarrow{OA}$ เมื่อ

1) A(2,7,5) 2) A(2,1,-9)

๒. จงหาเวกเตอร์ เมื่อกำหนดจุดและ ดังนี้

1) A(0,2,9) , B(2,0,2)

2) A(-2,5,4) ,B(5,-3,1/4)

ประเมินเรื่องผลคูณเชิงสเกล่าร์

๓ จงหามุมระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่กำหนดให้

๓.๑ $\bar{u} = 3\bar{i} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + 2\bar{k}$

๓.๒ $\bar{u} = [2,4,0]$ และ $\bar{u} = [-1,-1,4]$

ประเมินเรื่องโคไซน์แสดงทิศทาง

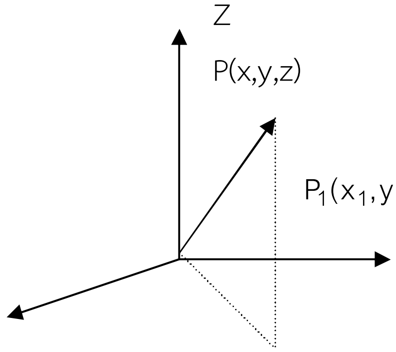
๔. จงหาโคไซน์แสดงเวกเตอร์ $\bar{a} = [6,-8,10]$ เมื่อเทียบกับแกน X,Y,Z ตามลำดับ

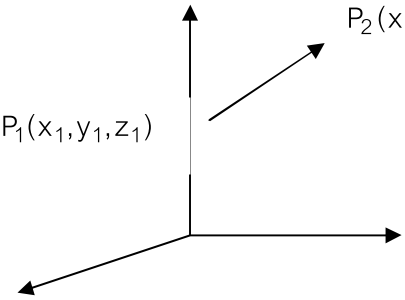
๓.เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ โคไซน์แสดงทิศทาง
อาจารย์สอนเชื่อมโยงเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

เวกเตอร์ในสามมิติ

บทนิยาม กำหนดให้ x,y,z เป็นจำนวนจริง เรียก $[x, y, z]$ ว่า เวกเตอร์ใน 3 มิติ หรือ เรียกสั้นๆ ว่า เวกเตอร์ในทางเรขาคณิต เราแทนเวกเตอร์ $[x, y, z]$ ด้วยส่วนของเส้นตรง ที่กำหนดทิศทาง ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุด O(0,0,0) และมีจุดสิ้นสุดที่(x,y,z) (ดังรูป(ก))

ถ้าส่วนของเส้นที่ระบุทิศทาง ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่$P_2(x_2, y_2, z_2)$ ซึ่งแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ หมายถึง เวกเตอร์ $[x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$ (ดังรูป(ข))





(ก)

(ข)

$\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$ $\qquad \overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$

ตัวอย่างที่ ๓ กำหนด P(5,3,8) และ Q(6,2,4) จงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$

วิธีทำ $\overrightarrow{PQ} = [6-5, 2-3, 4-8]$

$= [-1, -1, -4]$

อาจารย์สอนเชื่อมโยงเรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม ให้ $\bar{a} = [a_1, a_2, a_3], \bar{b} = [b_1, b_2, b_3]$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ ระหว่าง$\bar{a}$ และ $\bar{b}$ คือ $\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\bar{a} \bullet \bar{b}$ อ่านว่าเวกเตอร์เอดอตเวกเตอร์บี หรืออ่านสั้นๆ ว่า เอดอตบี

ตัวอย่างที่ ๑ กำหนดให้ $\bar{u} = [1,3,5]$ และ $\bar{v} = [0,4,2]$ จงหา $\bar{u} \bullet \bar{v}$

วิธีทำ $\bar{u} \bullet \bar{v}$ = 1(0)+3(4)+5(2)

= 22

ตัวอย่างที่ ๒ ให้ $\bar{u} = 3\bar{i} - 2\bar{j} - 6\bar{k}$ และ $\bar{v} = -3\bar{i} - 5\bar{j} + 8\bar{k}$ จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

วิธีทำ จาก $\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = 3(-3) + (-2)(-5) + (-6)(8) = 49$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (8)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

ดังนั้น $49 = 7(7\sqrt{2})\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $\theta = 45^\circ$

อาจารย์สอนเชื่อมโยงเรื่อง โคไซน์แสดงทิศทาง

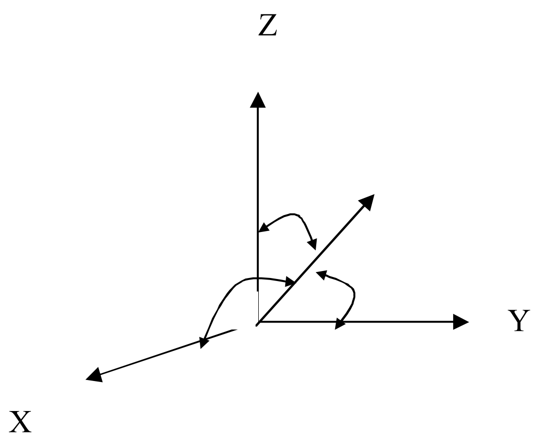
โคไซน์แสดงทิศทาง

ในการกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ สามารถทำได้โดยมุมที่เวกเตอร์ดังกล่าวทำกับแกน X แกน Y และแกน Z

ให้ α, β, λ เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\bar{u} = [a_1, a_2, a_3]$ ทำกับแกน X แกน Y และ แกน Z

เรียก α, β, λ ว่า มุมแสดงทิศทาง(direction angle)

เรียก $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\lambda$ ว่าไซน์แสดงทิศทาง (direction cosine)



บทนิยาม โคไซน์แสดงทิศทาง(dierection cosine) ของเวกเตอร์

$\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ซึ่ง $|\bar{a}| \neq 0$ เทียบกับแกน X,Y,Z ตามลำดับ

คือจำนวนสามจำนวน ซึ่งเรียงตามลำดับดังนี้ $\frac{a_1}{|a|}, \frac{a_2}{|a|}, \frac{a_3}{|a|}$

ตัวอย่างที่ ๓ จงหาโคไซน์แสดงเวกเตอร์ $\bar{a} = [6,-8,10]$ เมื่อเทียบกับแกน X,Y,Z ตามลำดับ วิธีทำ

$|\bar{a}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

ดังนั้นโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ เทียบกับแกน X,Y,Z ตามลำดับ คือ

$$\frac{6}{10\sqrt{2}}, \frac{-8}{10\sqrt{2}}, \frac{10}{10\sqrt{2}} \text{ หรือ } \frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

บทนิยาม

เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อ มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงกันข้ามก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทาง เทียบกับแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

๔.อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตท.ไม่เข้าใจ อย่างละเอียดโดยมีแผนการสอนดังนี้ อาจารย์สอนเรื่อง เวคเตอร์สามมิติ ผลคูณเชิงสเกล่าร์และโคไซน์แสดงทิศทางแบบประยุกต์ โดยอาจารย์อธิบายวิธีการอย่างละเอียด

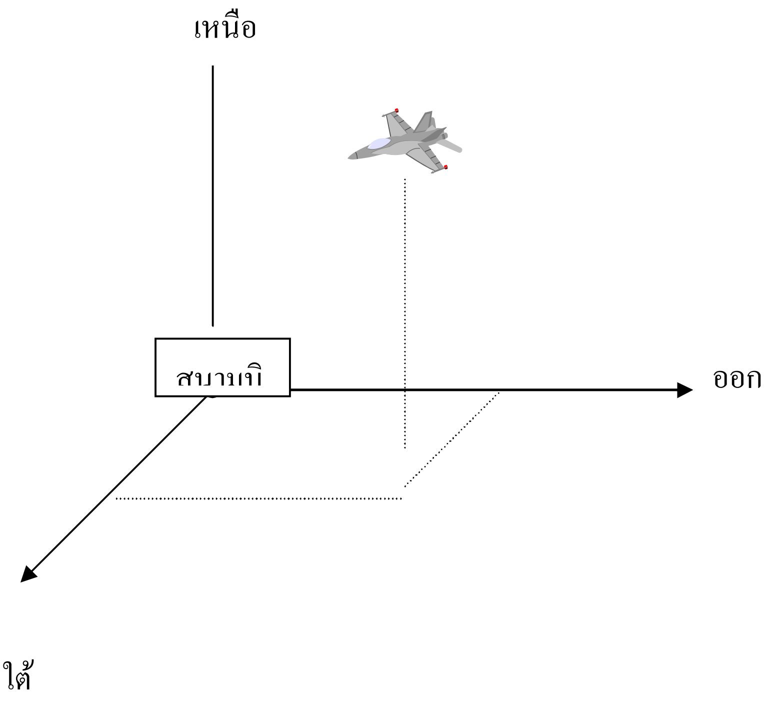
๑.จงหาค่าคงตัว c ที่ทำให้มุมระหว่าง $\bar{u} = \bar{i} + c\bar{j}$ กับ $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$ เท่ากับ 45 องศา

๒.จงหามุมระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่กำหนดให้

๒.๑ $\bar{u} = 3\bar{i} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + 2\bar{k}$

๒.๒ $\bar{u} = [2,4,0]$ และ $\bar{u} = [-1,-1,4]$

๓. เครื่องบินอยู่ห่างจากสนามบินทางทิศตะวันออก 5 กิโลเมตร ทางทิศใต้ 4 กิโลเมตร และอยู่เหนือพื้นดิน 6 กิโลเมตร จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของเครื่องบินลำนี้



๕.อาจารย์สอนเนื้อหา ผลคูณเชิงเวกเตอร์ พื้นที่และปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันโดยใช้เวกเตอร์

เนื้อหา

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

บทนิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์$\bar{a} = [a_1, a_2, a_3]$และ เวกเตอร์ $\bar{b} = [b_1, b_2, b_3]$ เขียนแทนด้วย $\bar{a}x\bar{b}$ อ่านว่า เอครอสบี หมายถึง เวกเตอร์ซึ่งนิยามดังนี้

$$\bar{a}x\bar{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

หมายเหตุ ๑. ในที่นี้ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - b_2a_3$ คือดีเทอร์มินันต์

๒.เพื่อความสะดวกเราอาจเขียนสูตรสำหรับเวกเตอร์ โดยอาศัยรูปดีเทอร์มินันต์ดังนี้

$$\bar{a}x\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ให้สังเกตว่า ส่วนที่นำหน้า I หาได้โดยการปิดแถวและหลักที่มี ที่เหลือคือ ส่วนที่นำหน้า ดังรูป $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

การหาส่วนที่นำหน้า j และ k ก็ทำเช่นเดียวกัน

ทฤษฎีบท ให้$\bar{a}$,$\bar{b}$ และ$\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ k เป็น เป็นจำนวนจริง

๑. $\bar{a}x\bar{b} = -(\bar{b}x\bar{a})$

๒. $(\bar{a} + \bar{b})x\bar{c} = (\bar{a}x\bar{c}) + (\bar{b}x\bar{c})$

๓. $\bar{a}x(\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}x\bar{b}) + (\bar{a}x\bar{c})$

๔. $\bar{a}x(k\bar{b}) = k(\bar{a}x\bar{b})$

๕. $\bar{a}x\bar{a} = 0$

๖. $(k\bar{a})x\bar{b} = k(\bar{a}x\bar{b})$

๗. $\bar{i}x\bar{j} = \bar{k}, \bar{j}x\bar{k} = \bar{i}, \bar{k}x\bar{i} = \bar{j}$

๘. $\bar{a} \bullet (\bar{a}x\bar{c}) = (\bar{a}x\bar{b}) \bullet \bar{c}$

๙.ถ้า$\bar{a}$ และ$\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์$\bar{a}$ จะได้ว่า $|\bar{a}x\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta$

เมื่อθ เป็นมุมระหว่าง$\bar{a}$ และ$\bar{b}$ ในสามมิติ ซึ่ง$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ และ

$\bar{a}x\bar{b} = (|\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta)n$ โดย n เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\bar{a}$ และ$\bar{b}$

๑๐.ให้ $\bar{a}x\bar{b}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\bar{a}x\bar{b}$ ตั้งฉากกับ$\bar{a}$ และ$\bar{b}$

๑๑. $\bar{a}\cdot(\bar{b}x\bar{c}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}x\bar{a}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b})$

ตัวอย่างที่ ๑ ให้ $\bar{a} = [0,1,2]$ และ $\bar{b} = [1,-1,3]$ จงหา $\bar{a}x\bar{b}$

วิธีทำ จาก $\bar{a}x\bar{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\bar{k}$

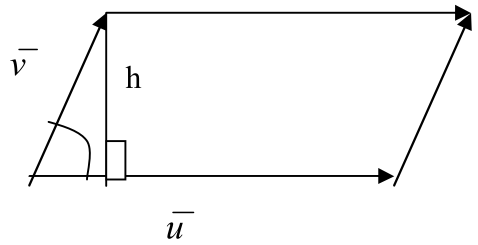
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= (1(3)-(-1)2)\bar{i} - (0(3)-1(2))\bar{j} + (0(-1)-1(1))\bar{k}$$

$$= 5\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$$

ความหมายทางเรขาคณิต

๑. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน เท่ากับ ความยาวฐานxความสูง

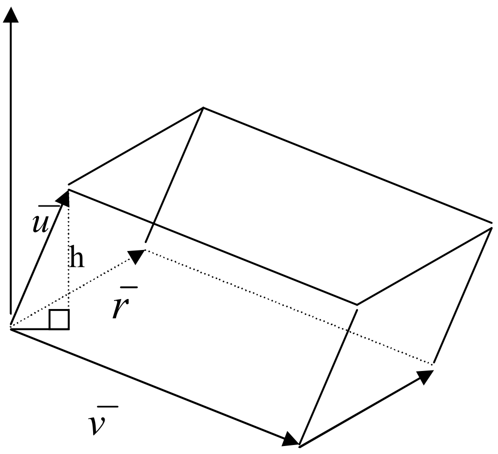
จากรูป พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน = $|\bar{u}|$ xh

$= |\bar{u}|\,|\bar{v}|\sin\theta$

$= |\bar{u}x\bar{v}|$

ดังนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นด้านประชิด เท่ากับ $|\bar{u}|\,|\bar{v}|\sin\theta$ ซึ่งเท่ากับ $|\bar{u}x\bar{v}|$

๒.ปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน



จากรูป h เป็นความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$ มายังระนาบที่กำหนดด้วย $\bar{v}$ และ $\bar{r}$

ดังนั้น h = $|\bar{u}||\cos\theta|$

และ $|\bar{v}x\bar{r}|$ เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบมุมเป็น $\bar{v}$ และ $\bar{r}$

ดังนั้นปริมาตรของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน = $|\bar{u}||\cos\theta|\,|\bar{v}x\bar{r}|$

$= |\bar{u}||\bar{v}x\bar{r}||\cos\theta|$

$= |\bar{u}\cdot(\bar{v}x\bar{r})|$

ตัวอย่างที่ ๒ จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\vec{AB} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ และ $\vec{AD} = 5\bar{i} - 3\bar{j}$

วิธีทำ $\vec{AB}x\vec{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}\bar{k}$

$= 3\bar{i} + 5\bar{j} - 21\bar{k}$

$|\vec{AB}x\vec{AD}| = \sqrt{9+25+441} = \sqrt{475} = 5\sqrt{19}$

ดังนั้นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $5\sqrt{19}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ ๓

กำหนด $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}, \bar{v} = \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{r} = \bar{i} + \bar{k}$

จงหาปริมาตรรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน

วิธีทำ ปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันเท่ากับ $|\bar{u}\cdot(\bar{v}x\bar{r})|$

$$\bar{v} x \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bar{k}$$

$$= (1-0)\bar{i} - (0-1)\bar{j} + (0-1)\bar{k}$$

$$= \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$$

$$\left|\bar{u} \cdot (\bar{v} x \bar{r})\right| = \left|(\bar{i} + \bar{j}) \cdot (\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})\right|$$

$$= \left|(1)(1) + (1)(1) + (0)(-1)\right| = \left|1 + 1 + 0\right| = 2$$

ดังนั้นปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตันคือ 2 ลูกบาศก์หน่วย

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

อาจารย์ชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้และทบทวนความรู้เดิมโดยใช้คำถาม นตท.เกี่ยวกับการหาผลคูณของเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ว่าทำได้อย่างไร หากเราต้องการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์จะทำได้อย่างไร

ขั้นสอน

๑.อาจารย์ถามถึงการคูณในเวกเตอร์ที่ นตท.ได้เรียนมาว่ามีอะไรบ้าง (การคูณเวกเตอร์ด้วย สเกลาร์ , ผลคูณเชิงสเกลาร์) แล้วการคูณระหว่างเวกเตอร์กับเวกเตอร์ได้เรียนแล้วหรือยัง

๒.อาจารย์บอก นตท.ว่า นอกจากคำตอบที่ นตท.ตอบมายังมีผลคูณอีกแบบหนึ่งเรียกว่า ผลคูณเชิงเวกเตอร์ แล้วอาจารย์ให้นิยามเกี่ยวกับการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ โดยเชื่อมโยงกับการหาดิเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์

๓.อาจารย์ยกตัวอย่างที่ ๑ ให้ นตท.ลองทำ แล้วอาจารย์เฉลยคำตอบพร้อมกับการอธิบายให้ นตท.เข้าใจ

๔.อาจารย์กล่าวถึงว่าเราสามารถนำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปประยุกต์ใช้ในการหาพื้นที่และปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ แล้วอาจารย์ก็อธิบายการประยุกต์ใช้ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ขั้นสรุป

อาจารย์ให้ นตท.ช่วยกันสรุปเนื้อหาที่เรียนร่วมกันอีกครั้งโดยอาจารย์อาจจะใช้คำถามกระตุ้น แล้วให้ นตท.ทำใบงาน ส่งท้ายคาบ

๖.แบบฝึกหัด ดังนี้

อาจารย์ทดสอบโดยให้ นตท.ทำแบบฝึกหัด

๑.ให้ $\overline{u} = 2\bar{i} - c\overline{j} + 3\overline{k}$ และ $\overline{v} = 3\bar{i} + 2\overline{j} + 4\overline{k}$ จงหาค่า c ที่ทำให้ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ตั้งฉากกัน

๒.ให้ $\overline{u} = [x, y, 1]$ โดยที่ ตั้งฉากกับ $[3,1,-1]$ และตั้งฉากกับ $[-3,2,2]$
แล้ว x^2-y มีค่าเท่าใด

๓.จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยมี $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นด้านประชิด

1. ให้ $\overline{u} = -\overline{j} + 3\overline{k}$ และ $\overline{v} = 3\bar{i} - 5\overline{k}$
2. ให้ $\overline{u} = \bar{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}$ และ $\overline{v} = \bar{i} - 2\overline{j}$

องค์ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ในการดำเนินการ จัดการเรียนรู้ งป๕๔

เรื่อง "เวกเตอร์ในสามมิติ" ชั้นปีที่ ๒

กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษา โรงเรียนเตรียมทหาร

ชื่อองค์ความรู้

เวกเตอร์ในสามมิติ ศึกษาบทนิยาม หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันและทิศตรงข้ามกัน

วัตถุประสงค์

๗. พัฒนาองค์ความรู้ของนตท. ที่มีผลระดับคะแนนที่ต่ำ

๘. เพิ่มทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

๙. ส่งเสริมเจตคติที่ดีในกลุ่มสาระวิชาคณิตศาสตร์

หลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๕. กำหนดขอบเขตองค์ความรู้ที่นตท. ต้องผ่านการประเมิน

๖. ประเมินความรู้เดิมในเนื้อหาเวกเตอร์ที่ขนานกันและการหาขนาดเวกเตอร์

๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ กับการแก้โจทย์ปัญหา

๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตท.ไม่เข้าใจ อย่างละเอียด

๕. อาจารย์สอนเนื้อหเวกเตอร์ในสามมิติ โดยเน้นการแก้โจทย์ปัญหาเป็นหลัก

๖. อาจารย์ให้นตท. ทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง

วิธีดำเนินการ

ทำการสอนวันพุธที่๓ สิงหาคม ๒๕๕๔ เวลา ๑๙๓๐ – ๒๑๓๐ น

การประเมินผล

ประเมินองค์ความรู้ด้วยโจทย์ปัญหา

แหล่งอ้างอิง

๑. เอกสารประกอบการเรียนรู้การสอนซ่อมเสริม

๒. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

ภาคผนวก

๕. ใบงาน

๖. แบบทดสอบเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

รายละเอียดหลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑. ขอบเขตองค์ความรู้ที่ นตท. ต้องผ่านการประเมิน ประกอบด้วย

๑. นตท. สามารถบอกนิยามของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้

๒. นตท. สามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกันและทิศตรงข้ามกันได้

๓. นตท. สามารถแก้ปัญหาโจทย์ประยุกต์เวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้

๒. ประเมินความรู้เดิมในเรื่องเวกเตอร์ที่ขนานกันและการหาขนาดเวกเตอร์

๑. ให้ $\overline{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (-1 , -3, 2) และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุด (-7, 5, 0) จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้ขนานกับเวกเตอร์ $\overline{w}$ หรือไม่

๑.๑) $\overline{u} = [3,-4,1]$

๑.๒) $\overline{v} = [-12,16,4]$

๑.๓) $\overline{s}\left[-2,\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right]$

๒. ให้ $\overline{u} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}, \overline{v} = 2\overline{j} - 3\overline{k}$ จงหา

๒.๑) ขนาดของ $\overline{u}$ และขนาดของ $\overline{v}$

๒.๒) ขนาดของ $2\overline{u} - \overline{v}$

๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องเวกเตอร์ที่ขนานกันและการหาขนาดเวกเตอร์

๑. เวกเตอร์ที่ขนานกัน

ให้ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ $\overline{u}$ ขนานกับ $\overline{v}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง k ที่ไม่เป็นศูนย์ที่ทำให้ $\overline{u} = k\overline{v}$

ถ้า $k > 0$ จะได้ว่า $\overline{u}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overline{v}$

ถ้า $k < 0$ จะได้ว่า $\overline{u}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overline{v}$

๒. การหาขนาดเวกเตอร์

กำหนด $\overline{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ขนาดของ $\overline{a}$ เขียนแทนด้วย $|\overline{a}|$

หมายถึง $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + a_3^2$

ตัวอย่าง จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\overline{a} = [3,5,\sqrt{2}]$

วิธีทำ ขนาดของ $\overline{a} = \sqrt{3^2 + 5^2} + (\sqrt{2})^2 = 6$

๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตท.ไม่เข้าใจ อย่างละเอียดโดยมีแผนการสอนดังนี้

การหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

๑. ให้เริ่มต้นด้วยการหาขนาดของเวกเตอร์ที่โจทย์กำหนดโดยใช้สูตร

กำหนด $\overline{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + a_3^2$

๒. หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยโดยใช้สูตร

ให้ $\bar{u} = [a\ \ , a_2, a_3]$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ คือ $-\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

๕. อาจารย์สอนเนื้อหาเวกเตอร์ในสามมิติโดยมีแผนการสอนดังนี้

เนื้อหา

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\bar{u}$

บทนิยาม

เรียกเวกเตอร์มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vecter)

ให้ $\bar{u} = [a\ \ , a_2, a_3]$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ คือ $-\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

ข้อตกลง แทนสัญลักษณ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน ดังนี้

$[1,0,0] = \bar{i}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแกน x

$[0,1,0] = \bar{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแกน y

$[0,0,1] = \bar{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแกน z

เรียก $[0,0,0]$ ว่าเวกเตอร์ศูนย์ เขียนแทนด้วย $\bar{0}$

หมายเหตุ ให้ $\bar{u} = [a_1, a_2, a_3]$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ สามารถเขียนแทนด้วย $\bar{u}$ ได้อีกแบบ

คือ $\bar{u} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$

ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$

วิธีทำ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$

กระบวนการจัดการเรียนรู้

กิจกรรมนำสู่การเรียน

1. ขั้นสร้างความสนใจ(10 นาที)

1.1 ให้นตท. พิจารณาขนาดของเวคเตอร์ในสามมิติ

1.2 ให้นตท. ร่วมกันอภิปรายว่าขนาดของเวคเตอร์ในสามมิติ เป็นอย่างไร

1.3 ให้นตท. ร่วมกันตั้งคำถามเกี่ยวกับสิ่งที่ต้องการรู้ จากเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรื่องขนาดของเวคเตอร์ในสามมิติ

กิจกรรมพัฒนาการเรียนรู้

2. ขั้นสำรวจและค้นหา (30 นาที)

2.1 แบ่งนตท. เป็นกลุ่มละ 5 คน

2.2 ให้นตท. วิเคราะห์การหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติ

3. ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป (20 นาที)

3.1 นตท. แต่ละกลุ่มนำเสนอการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติ

3.2 ครูตั้งคำถามว่า

- นตท. แต่ละกลุ่มได้ผลการศึกษาเหมือนกันหรือต่างกันอย่างไร เพราะเหตุใด

3.3 นตท. ทั้งหมดร่วมกันสรุปผลการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติ

4. ขั้นขยายความรู้ (30 นาที)

4.1 ให้นตท. ร่วมกันทำแบบฝึกหัดการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติเพิ่มเติม

4.2 ให้นตท. แต่ละกลุ่มอภิปรายถึงการนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติไปใช้ประโยชน์

5. ขั้นประเมินผล (30 นาที)

5.1 ให้นตท. ทบทวนคำตอบในใบงาน

5.2 ให้นตท. แต่ละคนย้อนกลับไปอ่าน สิ่งที่ต้องการรู้ แล้วตรวจสอบว่าได้เรียนรู้ครบถ้วนหรือไม่เพียงใด

5.3 ครูให้คะแนนตามผลการเรียนรู้

สื่อการสอน

2. แบบเรียนคณิตศาสตร์

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. การเรียกถามตอบ 2. ตรวจแบบฝึกหัดจากในแบบเรียน	1. นตท. สามารถตอบคำถามได้ไม่น้อยกว่าร้อยละ 75 2. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัดในแบบเรียนได้คะแนนไม่น้อยกว่าร้อยละ 75

๖. **แบบฝึกหัด ดังนี้**

แบบฝึกหัดที่ ๑

๑. กำหนดให้ = 4i – 3j + 5k และ Q(3, -1, 2) จงหาจุด P

๒. กำหนดให้ $\bar{u} = a\bar{i} + 2\bar{j} - (b-1)\bar{k}$

$\bar{v} = (3b-2)\bar{I} - c\bar{j} + (2-a)\bar{k}$

ถ้า $\bar{u} = 2\bar{v}$ แล้ว จงหา a, b, c

๓. จงแสดงว่าจุด A(4,7,-6),B(2,1,0),C(1,-2,3) อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

แบบฝึกหัดที่ ๒

๑. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ และทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$ เมื่อกำหนดให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \sqrt{3\bar{k}}$

๒. ให้ $\bar{u} = 4\bar{j} - 3\bar{k}$ และ $\bar{v} = 10\bar{i} - 8\bar{j} + \sqrt{5\bar{k}}$ จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\bar{v}$ แต่มีทิศทาบงเดียวกับ $\bar{u}$

๓. จงหาเวกเตอร์ $\bar{u}$ ซึ่งมีทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{v}$ และยาวเป็นสองเท่าของ $\bar{v}$ เมื่อ $\bar{v} = -2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$

๔. จงหาเวกเตอร์ $\bar{b}$ โดยที่ $|\bar{b}|$ = 3 และ $\bar{b}$ ขนานกับ $\bar{a} = [2,1,-2]$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

องค์ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ในการดำเนินการ จัดการเรียนรู้ งป๕๔
เรื่อง "ฟังก์ชันลอการิทึม" ชั้นปีที่ ๓
กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษาโรงเรียนเตรียมทหาร

ชื่อองค์ความรู้

ลอการิทึม ศึกษาบทนิยาม สมบัติการกลับสมการลอการิทึมเป็นสมการเอกซ์โพเนนเชียล และสามารถนำคุณสมบัติมาบางข้อของลอการิทึมไปใช้ทำโจทย์

วัตถุประสงค์

๑๐. พัฒนาองค์ความรู้ของนตท. ที่มีผลระดับคะแนนที่ต่ำ

๑๑. เพิ่มทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

๑๒. ส่งเสริมเจตคติที่ดีในกลุ่มสาระวิชาคณิตศาสตร์

หลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๗. กำหนดขอบเขตองค์ความรู้ที่นตท. ต้องผ่านการประเมิน

๘. ประเมินความรู้เดิมในเนื้อหาฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล

๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องฟังก์ชันลอการิทึมกับการแก้โจทย์ปัญหา

๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตทไม่เข้าใจ อย่างละเอียด

๕. อาจารย์สอนเนื้อหาฟังก์ชันลอการิทึมโดยเน้นการแก้โจทย์ปัญหาเป็นหลัก

๖. อาจารย์ให้นตท. ทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง

วิธีดำเนินการ

ทำการสอนวันพุธที่ ๑๗ สิงหาคม ๒๕๕๔ เวลา ๑๙๓๐ – ๒๑๓๐ น

การประเมินผล

ประเมินองค์ความรู้ด้วยโจทย์ปัญหา

แหล่งอ้างอิง

๑. เอกสารประกอบการเรียนรู้การสอนซ่อมเสริม

๒. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ภาคผนวก

๗. ใบงาน

๘. แบบทดสอบเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

รายละเอียดหลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑. ขอบเขตองค์ความรู้ที่ นตท. ต้องผ่านการประเมิน ประกอบด้วย

๑. นตท. สามารถบอกนิยามของฟังก์ชันลอการิทึมได้

๒. นตท. สามารถบอกสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึมได้

๓. นตท. สามารถกลับสมการลอการิทึมเป็นสมการเอกซ์โพเนนเชียลได้

๔. นตท. สามารถนำคุณสมบัติมาบางข้อของลอการิทึมไปใช้ทำโจทย์ได้

๒. ประเมินความรู้เดิมในเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

ทำแบบทดสอบเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $3^{x} = 3^{2x+1}$
2. $5^{x-1} = 1$
3. $5^{-x} = 25$
4. $2^{x(x-1)} = 4$
5. $3^{x(x+4)} = 3^{-4}$
6. $3^{x} = 9^{x+1} \times 27^{1-2x}$
7. $5^{2x+1} = 25^{x} \times 5^{3x}$

เฉลย

1. -1 2. 1 3. -2 4. -1 , 2 5. -2

6. 1 7. $\frac{1}{3}$

๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

ทำการยกตัวอย่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ

$y = a^{x}$ ฟังก์ชันนี้เป็นการสมมติค่า X แล้วหาค่า y ออกมาคือ a ยกกำลัง x แล้วได้ค่าเป็นเท่าไร เช่น $y = 2^{x}$

ให้ $x = 0 \rightarrow y = 1$

$x = 1 \rightarrow y = 2$

$x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

แต่ถ้ากลับกันคือทราบค่า y ต้องการหาว่า a ยกกำลังจึงจะได้ค่านี้ เช่น

$32 = 2^{x} \rightarrow X = 5$

$0.001 = 10^{x} \rightarrow X = -3$

$2 = (\sqrt{2})^{x} \rightarrow X = 2$

๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตท.ไม่เข้าใจ อย่างละเอียดโดยมีแผนการสอนดังนี้

๑. การแปลงฟังก์ชันจากเอกซ์โปเนนเชียลเป็นลอการิทึม

ในการเริ่มแปลงฟังก์ชันจะต้องเข้าใจนิยามของฟังก์ชันทั้งสองก่อน คือ

ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลจะอยู่ในรูปของ $y = a^{x}$ เมื่อ a คือ ฐาน เช่น $9 = 3^{2}$ อ่านว่า 9 เท่ากับ 3 ยกกำลัง 2 โดยมี 3 เป็นฐาน และ 2 เป็นเลขชี้กำลัง

ฟังก์ชันลอการิทึมจะอยู่ในรูปของ $y = \log_a x$ เมื่อ a คือ ฐาน เช่น $\log_3 9 = 2$ อ่านว่า ลอก 9 ฐาน 3 เท่ากับ 2 ซึ่งค่า $\log_3 9$ จะมีค่าเท่ากับเลขชี้กำลังของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

เนื่องจากฟังก์ชันทั้งสองเป็นฟังก์ชันผกผันกัน ให้เราสังเกตว่าฟังก์ชันทั้งสองจะมีฐานเหมือนกัน คือ ฐาน a ดังนั้นการแปลงฟังก์ชันให้ทำดังนี้

๑. ถ้าต้องการแปลง $9 = 3^2$ อยู่ในรูปฟังก์ชันลอการิทึม ให้ทำการใส่log หน้าตัวที่ไม่มีเลขชี้กำลัง คือ9 จะได้ log 9

๒. เนื่องจาก 3^2 มี 3 เป็นฐาน ดังนั้นฟังก์ชันลอการิทึมก็มีฐานเป็น3 เหมือนกัน จะได้ $\log_3 9$

๓. จากนั้น $\log_3 9$ จะมีค่าเท่ากับเลขชี้กำลังของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล นั่นคือ2

๔. จะได้ $\log_3 9 = 2$

๒. การแปลงฟังก์ชันจากลอการิทึมเป็นเอกซ์โปเนนเชียล

การแปลงฟังก์ชันจากลอการิทึมเป็นเอกซ์โปเนนเชียล จะมีลักษณะคล้ายกับการแปลงฟังก์ชันจากเอกซ์โปเนนเชียลเป็นลอการิทึม แต่เป็นไปในลักษณะทำย้อนกลับ เช่น $\log_5 25 = 2$ โดยมีขั้นตอน ดังนี้

๑. เนื่องจาก $\log_5 25$ จะมีค่าเท่ากับเลขชี้กำลังของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ดังนั้น ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลจะมีเลขชี้กำลังเท่ากับ2

๒. เนื่องจาก $\log_5 25$ มีฐานเท่ากับ 5 ดังนั้น ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลจะมีฐานเท่ากับ5 ด้วย

๓. จะได้ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล คือ $25 = 5^2$

๔. แผนภาพแสดงการแปลงฟังก์ชันจากลอการิทึมเป็นเอกซ์โปเนนเชียล

$$\log_5 25 = 2 \xrightarrow{\text{นำ 5 มาใส่ล่าง 2}} 25 = 5^2$$

5 เป็นฐาน
$\log_5 25$ = เลขชี้

นำ5 มาเขียนเป็นฐานและ
นำ2 มาเขียนเป็นเลขชี้

๕. อาจารย์สอนเนื้อหาฟังก์ชันลอการิทึมโดยมีแผนการสอนดังนี้

๑. ฟังก์ชันลอการิทึม

เนื้อหา

ฟังก์ชันลอการิทึม (LOGARITHMIC FUNCTION)

เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล { $(x,y) \in RxR$ / $y = a^x$, $a > 0$,$a \neq 1$ } เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก R ไปทั่วถึง R^+ ดังนั้นตัวผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเป็นฟังก์ชัน จากR^+ ไป R และฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ

$\{(x,y) \in R^+ \times R / x = a^y , a > 0 , a \neq 1 \}$

จาก $x = a^y$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ ได้ โดยกำหนดให้ $y = \log_a x$ ซึ่งอ่านว่า " ลอการิทึมเอกซ์ฐานเอ" หรือ " ล็อกเอกซ์ฐานเอ" ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเขียนใหม่ได้เป็น { $(x,y) \in R^+ x R / y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ }

นิยาม ฟังก์ชันลอการิทึม คือ { $(x,y) \in R^+ \times R / y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ }ซึ่งเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $(x,y) \in R^+ x R / y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ }

ตัวอย่างการเขียนสมการของจำนวนจริงที่เขียนในรูปเลขยกกำลังเป็นการเขียนในรูปลอการิทึม

ตัวอย่าง

๑. $9 = 3^2$ เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น $2 = \log_3 9$

๒. $1000 = 10^3$ เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น $3 = \log_{10} 1000$

๓. $5 = 25^{\frac{1}{2}}$ เขียนในรูปลอการิทึมได้เป็น $\frac{1}{2} = \log_{25} 5$

กิจกรรม

ขั้นนำ

1. ครูนำด้วยเรื่องสมการเอกซ์โพเนนเชียล คือ

$y = a^x$ ฟังก์ชันนี้เป็นการสมมติค่า X แล้วหาค่า y ออกมาคือ a ยกกำลัง x แล้วได้ค่าเป็นเท่าไร เช่น $y = 2^x$

ให้ $x = 0 \rightarrow y = 1$

$x = 1 \rightarrow y = 2$

$x = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

แต่ถ้ากลับกันคือทราบค่า y ต้องการหาว่า a ยกกำลังจึงจะได้ค่านี้ เช่น

$32 = 2^x \rightarrow X = 5$

$0.001 = 10^x \rightarrow X = -3$

$2 = (\sqrt{2})^x \rightarrow X = 2$

ขั้นสอน

๑. ครูให้นิยามของลอการิทึม

๒. เนื่องจากการเขียนลอการิทึมของ x ฐาน a ยาว เราจึงใช้สัญลักษณ์ $\log_a x$

๓. เพื่อดูความเข้าใจครูให้นักเรียนช่วยกันทำประโยคเอกซ์โพเซียลให้เป็นประโยคตามตัวอย่างที่ 1

๔. ให้นักเรียนช่วยกันหาค่าโดยใช้นิยามของ ลอการิทึม

๕. เพื่อทดสอบความเข้าใจจึงลองให้นักเรียนกลับประโยคลอการิทึมให้เป็นประโยคเอกซ์โพเนนเชียลตามตัวอย่างที่2

๖. เมื่อนักเรียนพอจะเข้าใจลอการิทึมบ้างแล้วลองให้นักเรียนนิยามฟังก์ชันลอการิทึมโดยครูแนะนำว่า ฟังก์ชันที่กลับกันกับฟังก์ชันเอกซ์โพเซียลเนนเชียล

ขั้นสรุป

นักเรียนช่วยกันสรุปความหมายของสมการนั้นลักษณะของสมการลอการิทึมต่างๆ

สื่อการสอน

แบบเรียนคณิตศาสตร์

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
๑. การเรียกถามตอบ ๒. ตรวจแบบฝึกหัดจากในแบบเรียน	๑. นตท. สามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง๘๐% ขึ้นไป ๒. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัดที่ ๑ ในแบบเรียนเสริมได้ถูกต้องมากกว่า๑๐ ข้อ จาก๑๔ ข้อ

๒. สมบัติลอการิทึม

เนื้อหา

สมบัติที่สำคัญของลอการิทึมมีดังต่อไปนี้

เมื่อ a, b, M, N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง

1 . $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2 . $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3 . $\log_a M^k = k\log_a M$

4 . $\log_a a = 1$

5 . $\log_a 1 = 0$

6 . $\log_{a^k} M = \frac{1}{k}\log_a M$

7 . $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

8 . $a^{\log_a M} = M$ *

9 . $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

ตัวอย่าง จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\log_7 \sqrt[3]{7} = \log_7 7^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_7 7 = \frac{1}{3}$

2. $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = (-4)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = -4$

3. $\log_{10} 100$ =…………………………………………………………………………

4. $\log_{10} 0.1$ =…………………………………………………………………………

5. $\log_a a^4$ = …………………………………………………………………………

6. $\log_{\frac{1}{2}} 32$ =……………………………………………………………………

7. $\log_{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$ = ……………………………………………………………………

8. $\log_2 \sqrt{32\sqrt[3]{16\sqrt[5]{2}}}$ = ………………………………………………………………

เฉลย

3. 2

4. -1

5. 4

6. -5

7. $-\frac{2}{3}$

8. $\frac{16}{5}$

กิจกรรม

ขั้นนำ

๑. ให้นักเรียนช่วยกันสรุปคุณสมบัติของลอการิทึมที่เรียนกันไปก่อนหน้านี้

ขั้นสอน

๑. ครูเขียนบทแทรก $\log_g A_1 A_2 \ldots A_n = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \ldots + \log_a$ An

โดยแทนตัว A_i เป็น M ทุกตัว

๒. สุ่มนักเรียนช่วยหาคำตอบในการขึ้นสอนตัวอย่างที่ 1

๓. ครูสอนคุณสมบัติ 2 – 9 พร้อมทั้งยกตัวอย่างโดยเฉพาะคุณสมบัติที่ 8 บรรทัดที่ทำเครื่องหมาย* คือการtake log (เทค log ฐาน b ไปทั้งสองข้าง) และยกตัวอย่างที่ 1 ประกอบ

๔. ครูให้สังเกตกฎการเปลี่ยนฐานลอการิทึม พยายามทำฐานทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับโดยใช้คุณสมบัติของlog ต่างๆที่เรียนไปแล้ว

๕. ครูเขียนตัวอย่างที่2- 3 พร้อมทั้งสุ่มนักเรียนทำโจทย์โดยเรียกทีละคนทำทีละบรรทัด

ขั้นสรุป

นักเรียนช่วยกันสรุปคุณสมบัติของลอการิทึมที่เรียนไปโดยเรียกถามทีละคน

สื่อการสอน

แบบเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องลอการิทึม

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	**การประเมินผล**
๑. การเรียกถามตอบ ๒. ตรวจแบบฝึกหัดจากใน แบบเรียน	๑. นตท. สามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง๘๐% ขึ้นไป ๒. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัดที่ ๒ ในแบบเรียนเสริมได้ถูกต้องมากกว่า๓๐ ข้อ จาก ๓๖ ข้อ

๖. **แบบฝึกหัด ดังนี้**

แบบฝึกหัดที่ ๑

1. จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปลอการิทึม

1.1 $5^2 = 25$ จะได้ว่า ....

1.2 $27^{\frac{1}{3}} = 3$ จะได้ว่า ....

1.3 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ จะได้ว่า ....

1.4 $10^{-5} = 0.00001$ จะได้ว่า ....

1.5 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$ จะได้ว่า ....

1.6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$ จะได้ว่า ....

1.7 $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1,000$ จะได้ว่า ....

1.8 $4^{-\frac{3}{2}} = 0.125$ จะได้ว่า ....

2. จงเขียนสมการต่อไปนี้เป็นสมการในรูปเลขยกกำลัง

2.1 $\log_{10} 100 = 2$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้..............................

2.2 $\log_2 32 = 5$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้...........................

2.3 $\log_7 1 = 0$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้..............................

2.4 $\log_4 \left(\frac{1}{64}\right) = -3$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้..............................

2.5 $\log_{10} 0.001 = -3$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้............................

2.6 $\log_3 \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3}$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้..............................

เฉลยแบบฝึกหัดที่ ๑

1.1 $5^2 = 25$ จะได้ว่า $2 = \log_5 25$

1.2 $27^{\frac{1}{3}} = 3$ จะได้ว่า $\frac{1}{3} = \log_{27} 3$

1.3 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ จะได้ว่า $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$

1.4 $10^{-5} = 0.00001$ จะได้ว่า $-5 = \log_{10} 0.00001$

1.5 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$ จะได้ว่า $-5 = \log_{\frac{1}{2}} 32$

1.6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$ จะได้ว่า $-3 = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{27}{8}\right)$

1.7 $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1,000$ จะได้ว่า $-3 = \log_{10} 1000$

1.8 $4^{-\frac{3}{2}} = 0.125$ จะได้ว่า $-\frac{3}{2} = \log_4 0.125$

2.1 $\log_{10} 100 = 2$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้ $10^2 = 100$

2.2 $\log_2 32 = 5$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้ $2^5 = 32$

2.3 $\log_7 1 = 0$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้ $7^0 = 1$

2.4 $\log_4 \left(\frac{1}{64}\right) = -3$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้ $4^{-3} = \frac{1}{64}$

2.5 $\log_{10} 0.001 = -3$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้ $10^{-3} = 0.001$

2.6 $\log_3 \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3}$ เขียนสมการเลขยกกำลังได้ $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

แบบฝึกหัดที่ ๒

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $\log_5 1$ = ………………………………..

1.2 $\log_5 5$ = ……………………………….

1.3 $\log_3 81$ = ……………………………….

1.4 $\log_2 \sqrt[3]{2}$ = ……………………………….

1.5 $\log_{\frac{1}{3}} 9$ = ……………………………….

1.6 $\log_{2\sqrt{2}} 64$ = ……………………………….

1.7 $10^{\log_{10} 6}$ = ……………………………….

1.8 $13^{2\log_{13} 5}$ = ……………………………….

1.9 $8^{1+\log_2 5}$ = ……………………………….

1.10 $3^{\log_9 4}$ = ……………………………….

1.11 $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^{\log_3 10}$ = ……………………………….

1.12 $\log_{10} \log_3 \log_5 125$ = ……………………………….

1.13 $8^{\log_5 3} - 3^{\log_5 8}$ = ……………………………….

1.14 $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_{127} 128$

= ……………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………

1.15 $\log_z \frac{1}{8} + \log_4 \frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{\frac{1}{8}} 16$

= ……………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………

1.16 $\dfrac{\log_7 \sqrt{125} + \log_7 \sqrt{27} - \log_7 \sqrt{64}}{\log_7 15 - \log_7 4}$

= ……………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………

1.17 $\log_4(\log_{10} 81) - \log_4(\log_{10} 3)$

= ……………………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………

1.18 $\dfrac{1}{\log_a abc} + \dfrac{1}{\log_b abc} + \dfrac{1}{\log_c abc}$ เมื่อ a , b , c เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1

= ……………………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………

1.19 $\dfrac{1}{\log_2 120} + \dfrac{1}{\log_3 120} + \dfrac{1}{\log_4 120} + \dfrac{1}{\log_5 120}$

= ……………………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………

1.20 $\log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\infty}}}$

= ……………………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………

1.21 $7^{2\log_7\left(\frac{1}{7}\right)}$

= ………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………

1.22 $2^{1-\log_2 7}$

= ………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………

1.23 $25^{1-\log_5 2}+3^{-\log_3 2}-16^{\log_4 3}$

= ………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………

1.24 $\log_{10} 2 = 0.3010$ จงหาค่าของ $\log_{10}$

………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………

1.25 $\log_2 a = 3$ จงหาค่าของ $\log_a$

= ………………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………………

= ………………………………………………………………………………………………

2. กำหนดให้ $2\log_2 a - 3\log_2 b = 4$ และ $3\log_2 a - 4\log_2 b = 6$
จงหาค่า $\left(a^{2b} + \log_{2a} b\right)^{\frac{1}{2}}$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

3. จงหาค่าของ $\log_a \tan 1^0 + \log_a \tan 2^0 + \log_a \tan 3^0 + \ldots + \log_a \tan 89^0$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

4. จงหาค่าของ x ในแต่ละข้อต่อไปนี้
4.1 $\log_5 125 = x$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

4.2 $\log_x 8 = 3$

....

....

....

4.3 $\log_x 625 = 4$

....

....

....

4.4 $\log_x \left(\frac{125}{27}\right) = -\frac{3}{2}$

....

....

....

4.5 $\log_{32} x = -\frac{2}{5}$

....

....

....

4.6 $\log_2 x = -\frac{3}{2}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4.7 $\log_{\frac{3}{5}} x = -2$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4.8 $\log_4 3 = -3$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

5. ถ้า $(xy)^{n-1} = a$, $(xy)^{m-1} = b$ และ $(xy)^{k-1} = c$ แล้ว จงหา
$(m - k)\log_{10} a + (k - n)\log_{10} b + (n - m)\log_{10} c$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

เฉลยแบบฝึกหัดที่ ๒

1.1	0	1.2	1	1.3	4	1.4	$\frac{1}{3}$
1.5	-2	1.6	4	1.7	6	1.8	25
1.9	1000	1.10	2	1.11	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1.12	0
1.13	0	1.14	7	1.15	$\frac{1}{6}$	1.16	3
1.17	1	1.18	1	1.19	1	1.20	1
1.21	$\frac{1}{49}$	1.22	$\frac{2}{7}$	1.23	$-\frac{9}{4}$	1.24	1.7090
1.25	4	2	4	3	0	4.1	3
4.2	2	4.3	5	4.4	$\frac{9}{25}$	4.5	$\frac{1}{4}$
4.6	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	4.7	$\frac{25}{9}$	4.8	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	5	0

องค์ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ในการดำเนินการ จัดการเรียนรู้ งป๕๔

เรื่อง "เลขยกกำลัง" ชั้นปีที่ ๓

กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วน+การศึกษา โรงเรียนเตรียมทหาร

ชื่อองค์ความรู้

เลขยกกำลัง เพื่อให้สามารถบวก ลบ คูณ หาร เลขยกกำลังโดยการทำให้แต่ละจำนวนอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากัน หรือ เลขชี้กำลังเท่ากัน และแก้สมการเลขยกกำลังได้

วัตถุประสงค์

๑๓.พัฒนาองค์ความรู้ของนตท. ที่มีผลระดับคะแนนต่ำ

๑๔.เพิ่มทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กับ นตท.

๑๕.ส่งเสริมเจตคติที่ดีในกลุ่มสาระวิชาคณิตศาสตร์ ให้กับ นตท.

หลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๙. กำหนดขอบเขตองค์ความรู้ที่นตท ต้องผ่านการประเมิน

๑๐. ประเมินความรู้เดิมในเนื้อหาเลขยกกำลัง

๑๑. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องเลขยกกำลังกับการแก้สมการ

๑๒. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตทไม่เข้าใจ อย่างละเอียด

๑๓.อาจารย์สอนเนื้อหาเลขยกกำลัง โดยเน้นการแก้โจทย์ปัญหาเป็นหลัก

๑๔.อาจารย์ให้นตท ทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง

วิธีดำเนินการ

ทำการสอนวันพฤหัสบดีที่๓ สิงหาคม ๒๕๕๔ เวลา ๑๙๓๐ – ๒๑๓๐ น

การประเมินผล

ประเมินองค์ความรู้โดยการทดสอบ โดยใช้โจทย์ปัญหาแบบอัตนัย

แหล่งอ้างอิง

๙. เอกสารประกอบการเรียนรู้การสอนซ่อมเสริม

๑๐. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ภาคผนวก

๑. ใบงานเรื่อง "เลขยกกำลัง"

๒. แบบทดสอบเรื่อง "เลขยกกำลัง"

รายละเอียด หลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑. ขอบเขตองค์ความรู้ที่ นตท. ต้องผ่านการประเมิน ประกอบด้วย

๑. นตท. สามารถบวก ลบ คูณ หาร เลขยกกำลังโดยการทำให้แต่ละจำนวนอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีฐานเท่ากัน หรือ เลขชี้กำลังเท่ากัน และหาผลลัพธ์ได้

๒. นตท. สามารถบวก ลบ คูณ หาร จำนวนที่มีเครื่องหมายกรณฑ์ได้

๓. นตท. สามารถแก้สมการได้

๒. ประเมินความรู้เดิมในเรื่องเลขยกกำลัง

เนื่องจากจำเป็นจะต้องใช้ความรู้จากเรื่องเลขยกกำลังซึ่ง นตท. ได้เรียนมาแล้วตั้งแต่มัธยมต้น นตท โดยมีเนื้อหาเกี่ยวกับเลขยกกำลังซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกมาดังนั้น ก่อนที่จะกล่าวถึงเลขยกกำลังซึ่งมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ(อยู่ในรูปเศษส่วน)และจึงจำเป็นต้องจะขอทบทวนสิ่งที่ นตท. ได้เรียนมาแล้วพอสังเขป ดังนี้

<u>**เนื้อหา**</u>

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

นิยาม $\quad {}^{n} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ ตัว}}$ เมื่อ $a \varepsilon R$ และ $n \varepsilon I^{+}$

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง

เรียก a ว่า ฐานของเลขยกกำลัง

เรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

เช่น $2^4 = \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{4\text{ ตัว}}$

เรียก 2^4 ว่า เลขยกกำลัง

เรียก 2 ว่า ฐานของเลขยกกำลัง

เรียก 4 ว่า เลขชี้กำลัง

สมบัติของเลขยกกำลัง

ถ้า a , b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a\neq 0 , b\neq 0$ และ m , n เป็นจำนวนเต็มแล้ว

1) $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3) $(a^m)^n = a^{mn}$

4) $(ab)^n = a^n b^n$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6) $a^0 = 1$

7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; n เป็นจำนวนเต็มบวก

หมายเหตุ 0^0 ไม่มีการนิยาม

ตัวอย่างสมบัติเลขยกกำลัง

1) $2^3\cdot 2^4 = 2^{3+4}$

2) $\frac{2^5}{2^4} = 2^{5-4}$

3) $(2^3)^5 = a^{3\text{x}5}$

4) $(2\text{x}3)^5 = 2^5 3^5$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$

6) $2^0 = 1$

7) $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$

<u>แบบทดสอบ ๒.๑</u>

จงหาค่าของ

1) $3^2 \times 4^3 =$ 2) $2^2 \times 3^3 =$

3) $\dfrac{3^5}{3^2} =$ 4) $\dfrac{-4^5}{-4^2} =$

5) $(5^2)^3 =$ 6) $(-2^2)^3 =$

7) $(2\times3)^3 =$ 8) $(4\times3)^5 =$

9) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 =$ 10) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^5 =$

11) $10^0 =$ 12) $(-5)^0 =$

13) $12^{-2} =$ 14) $5^{-3} =$

เฉลย

1) $3^2 \times 4^3 = 576$ 2) $2^2 \times 3^3 = 108$

3) $\dfrac{3^5}{3^2} = 27$ 4) $\dfrac{(-4)^5}{(-4)^2} = -64$

5) $(5^2)^3 = 15625$ 6) $(-2^2)^3 = 64$

7) $(2\times3)^3 = 216$ 8) $(4\times3)^5 = 12^5$

9) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{8}{125}$ 10) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^5 = \dfrac{-243}{1024}$

11) $10^0 = 1$ 12) $(-5)^0 = 0$

13) $12^{-2} = \dfrac{1}{144}$ 14) $5^{-3} = \dfrac{1}{125}$

a. กิจกรรม สำหรับ เพื่อการทบทวน

ขั้นนำ

๑. ครูแจ้งจุดประสงค์ของการทบทวนในครั้งนี้

ขั้นสอน

๑. ครูบอกนิยาม และสาธิตการทำโจทย์พร้อมทั้งกระตุ้นให้ นตท.คิดโดยให้ นตท.ทั้งชั้น พูดสิ่งที่ครูกำลังจะเขียนบนกระดาน

๒. ครูสาธิตการทำโจทย์ตัวอย่างที่ข้อที่๑ ถึง ๗ พร้อมทั้งกระตุ้นให้ นตท.คิดโดยให้ นตท. ทั้งชั้น พูดสิ่งที่ครูกำลังจะเขียนบนกระดาน

ขั้นสรุป

๓. ครูลบโจทย์บนกระดาน ครูกระตุ้นและประเมินผล นตทโดยการสุ่มถาม นตท.ข้อละ ๒ นาย โดยในแต่ละข้อครูให้ นตท.ทั้งชั้นกล่าวข้อสรุป ทำเช่นนี้จนครบ ๖ ข้อ

สื่อการสอน

๑. แผนการสอนของครู (แบบทดสอบ ๒.๑)

๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องจำนวนตรรกยะและการบวก ลบ คูณ หารเศษส่วน

๓.๑. จำนวนตรรกยะ

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้ เช่น $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{22}{7}$, $-\frac{2}{99}$, $\frac{10}{9}$ เป็นต้น

๓.๒. การบวกเศษส่วน

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ เมื่อ a , b , c , d เป็นจำนวนเต็ม และ b , d $\neq 0$

ขั้นตอนการบวกเศษส่วนเช่น $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$

๑. หา ค.ร.น. ของ ตัวส่วน จะได้ ค.ร.น. ของ 3 กับ 5 คือ 15

๒. ทำให้ส่วนทั้งสองตัวเท่ากัน นั่นคือ $\frac{2}{3}$ ให้ทำส่วนเป็น 15 โดยการนำ $\frac{5}{5}$ มาคูณ จะได้ $\frac{10}{15}$ และ $\frac{4}{5}$ ให้ทำส่วนเป็น 15 โดยการนำ $\frac{3}{3}$ มาคูณ จะได้ $\frac{12}{15}$

๓. นำเศษทั้งสองตัวมาบวกกัน จะได้ $\frac{10+12}{15}$

๔. ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ คือ $\frac{22}{15}$

ตัวอย่าง ๓.๒.๑
$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{4}{5} &= \frac{2}{3}\square\frac{5}{5}+\frac{4}{5}\square\frac{3}{3}\\ &=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}\\ &=\frac{10+12}{15}\\ &=\frac{22}{15}\end{aligned}$$

๓.๓. การลบเศษส่วน

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ เมื่อ a , b , c , d เป็นจำนวนเต็ม และ b , d $\neq 0$

ขั้นตอนการลบเศษส่วนเช่น $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$

๑. หา ค.ร.น. ของ ตัวส่วน จะได้ ค.ร.น. ของ 3 กับ 5 คือ 15

๒. ทำให้ส่วนทั้งสองตัวเท่ากัน นั่นคือ $\frac{2}{3}$ ให้ทำส่วนเป็น 15 โดยการนำ $\frac{5}{5}$ มาคูณ จะได้ $\frac{10}{15}$

และ $\frac{4}{5}$ ให้ทำส่วนเป็น 15 โดยการนำ $\frac{3}{3}$ มาคูณ จะได้ $\frac{12}{15}$

๓. นำเศษทั้งสองตัวมาบวกกัน จะได้ $\frac{10-12}{15}$

๔. ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ คือ $-\frac{2}{15}$

ตัวอย่าง ๓.๓.๑ $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\square\frac{5}{5}-\frac{4}{5}\square\frac{3}{3}$

$$=\frac{10}{15}-\frac{12}{15}$$

$$=\frac{10-12}{15}$$

$$=-\frac{2}{15}$$

๓.๔. การคูณเศษส่วน

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ เมื่อ a , b , c , d เป็นจำนวนเต็ม และ b , d $\neq 0$

ขั้นตอนการคูณเศษส่วนเช่น $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$

๑. ให้นำตัวเศษทั้งสองตัวคูณกัน จะได้ 2×4 คือ 8

๒. ให้นำตัวส่วนทั้งสองตัวคูณกัน จะได้ 3×5 คือ 15

๓. ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ คือ $\frac{8}{15}$

ตัวอย่าง ๓.๔.๑ $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}$

$$=\frac{8}{15}$$

๓.๕. การหารเศษส่วน

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ เมื่อ a , b , c , d เป็นจำนวนเต็ม และ b , c , d $\neq 0$

ขั้นตอนการคูณเศษส่วนเช่น $\frac{2}{3}\div\frac{4}{5}$

๑. ให้ทำการกลับเศษเป็นส่วน และ กลับส่วนเป็นเศษ ของตัวหาร เช่น $\frac{4}{5}$ เป็น $\frac{5}{4}$

๒. จากนั้นให้นำตัวเศษทั้งสองตัวคูณกัน จะได้ 2×5 คือ 10

๓. ให้นำตัวส่วนทั้งสองตัวคูณกัน จะได้ 3×4 คือ 12

๔. ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ คือ $\frac{10}{12}$ ซึ่งทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำได้ คือ $\frac{5}{6}$

ตัวอย่าง ๓.๕.๑ $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$

$$= \frac{2 \times 5}{3 \times 4}$$

$$= \frac{10}{12}$$

$$= \frac{5}{6}$$

๔. กิจกรรม สำหรับ เนื้อหาในส่วนที่เชื่อมโยง มีดังนี้

ขั้นนำ

๑. ครูถามคำถามนำ เช่น“การบวก ลบ คูณ หรือหารเศษส่วน มีสิ่งที่ต้องคำนึงถึงเป็นพิเศษมีหรือไม่ และถ้ามีสิ่งนั้นคืออะไร ”

๒. ครูกระตุ้น นตท.โดยสุ่มถาม นตท.จำนวน ๕ – ๖ นาย

๓. ครูแจ้งจุดประสงค์ของการเรียน ด้วยการเขียนบนกระดาน

ขั้นสอน

๑. ครูใช้วิธีสาธิตเรื่องการบวก เศษส่วน โดยใช้โจทย์ ๓.๑.๑ และกระตุ้นให้นตท.คิดตาม โดยให้ นตท.ทั้งชั้นเรียน พูดขั้นตอนต่างๆของการทำโจทย์

๒. ครูใช้วิธีสาธิตเรื่องการลบ เศษส่วน โดยใช้โจทย์ ๓.๒.๑ และกระตุ้นให้นตท.คิดตาม โดยให้ นตท.ทั้งชั้นเรียน พูดขั้นตอนต่างๆของการทำโจทย์

๓. ครูใช้วิธีสาธิตเรื่องการคูณเศษส่วน โดยใช้โจทย์ ๓.๓.๑ และกระตุ้นให้นตท.คิดตาม โดยให้ นตท.ทั้งชั้นเรียน พูดขั้นตอนต่างๆของการทำโจทย์

๔. ครูใช้วิธีสาธิตเรื่องการหาร เศษส่วน โดยใช้โจทย์ ๓.๔.๑ และกระตุ้นให้นตท. คิดตาม โดยให้ นตท.ทั้งชั้นเรียน พูดขั้นตอนต่างๆของการทำโจทย์

ขั้นสรุป

๑. ครูกระตุ้น นตท. สรุปเรื่องการบวก การลบ การคูณ และการหาร เศษส่วน โดยให้ นตท. ทั้งชั้นเรียนพูดข้อสรุปที่ นตท.เข้าใจ (ครูอาจปรับแก้เพื่อให้ นตท.เข้าใจอย่างถูกต้อง)

๒. ครูเขียนข้อสรุปต่างๆ บนกระดาน

สื่อการสอน

เอกสารประกอบการเรียนเสริม , แผนการสอนของครู

๕. อาจารย์สอนเนื้อหาเลขยกกำลัง โดยมีแผนการสอนดังนี้

๑. จำนวนจริงในรูปกรณฑ์

- **เนื้อหา**

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n จำนวนจริง y จะเป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

1. y เป็นรากที่ n ของ x
2. $xy \geq 0$

แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x ด้วย $\sqrt[n]{x}$

<u>ข้อสังเกต</u> 1. กรณี n เป็นจำนวนคี่ x เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า $\sqrt[n]{x}$ จะเป็นจำนวนจริงใดๆ

2. กรณี n เป็นจำนวนคู่ , x เป็นจำนวนจริงใดๆ

2.1 $x > 0$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{x}$ เป็นจำนวนจริงบวก

2.2 $x < 0$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{x}$ หาค่าไม่ได้

2.3 $x = 0$ จะได้ว่า $\sqrt[n]{x} = 0$

<u>ข้อตกลง</u> กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1
a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ a มีรากที่ n

1. รากที่ n ของ a เขียนแทนด้วย $a^{\frac{1}{n}}$ นั่นคือ

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

2. $$a^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

<u>สมบัติเกี่ยวกับรากที่ n</u>

กำหนด a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า1 โดย $\sqrt[n]{a}$ และ $\sqrt[n]{b}$ เป็นจำนวนใดๆ

1. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$
3. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{, n เป็นจำนวนคู่} \\ a & \text{, n เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$
6. ถ้า m เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า1

6.1 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

6.2 $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ เมื่อ m เป็นจำนวนคี่

6.3 $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ เมื่อ m เป็นจำนวนคู่ , $a \geq 0$

7. $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ เมื่อ $a \geq 0$, $b \geq 0$

8. $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right|$ เมื่อ a ≥ 0 , b ≥ 0

9. รากที่สองของ $a+b+2\sqrt{ab}$ คือ $\pm\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ เมื่อ a ≥ 0 , b ≥ 0

10. รากที่สองของ $a+b-2\sqrt{ab}$ คือ $\pm\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ เมื่อ a ≥ 0, b ≥ 0

ตัวอย่าง 5

1. จงหาค่าของ

 1.1 $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{80}$

 1.2 $\sqrt{147}-7\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

 1.3 $\frac{2\sqrt{15}}{3\sqrt{7}} \div \frac{4\sqrt{18}}{9\sqrt{35}}$

 1.4 $\sqrt{18a^3b^3}-a\sqrt{8b^3a}-b\sqrt{50a^3b}$

 1.5 $2x\sqrt{x^2a} + 3x^2\sqrt{4a} - x\sqrt{9x^2a}$, x ≥ 0

2. จงทำให้ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

 2.1 $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

 2.2 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

3. จงหาค่าของ

 3.1 $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

 3.2 $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}-1} \div \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$

 3.3 $\frac{\sqrt{x^2-y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}+y} \div \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$

4. จงหาค่าของ

 4.1 $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

 4.2 รากที่ 2 ของ $7+2\sqrt{10}$

 4.3 $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$

 4.4 รากที่ 2 ของ $9-2\sqrt{20}$

 4.5 $\sqrt{8+\sqrt{28}}$

 4.6 รากที่ 2 ของ $\sqrt{8+\sqrt{28}}$

4.7 รากที่ 2 ของ $6 - 4\sqrt{2}$

4.8 รากที่ 2 ของ $3x-1+2\sqrt{2x^2-3x-2}$

4.9 $\sqrt{1+\sqrt{21+12\sqrt{3}}}$

- **กิจกรรม การสอนเนื้อหาเลขยกกำลัง – นิยาม รากที่ n**

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้โดยเขียนบนกระดาน
2. ครูสุ่มถามนักเรียน ๓-๕ นาย ว่า “ทำไมเราต้องสนใจค่าของ n และ x ของนิพจน์ $\sqrt[n]{x}$?? ”
3. ครูสุ่มถามนักเรียน ๓-๕ นาย ว่า “เราสามารถใช้รูปแบบอื่นได้อีกหรือไม่ นอกจากวิธีจัด รูป $(m+n)\pm 2\sqrt{mn}$ ”

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายวิธีแก้ปัญหา โจทย์ตัวอย่างที่1 - 4 และกระตุ้นให้ นตท.บอกสิ่งที่ครูจะเขียนบนกระดาน และพร้อมๆกับอธิบายให้นักเรียนเข้าใจในแต่ละขั้นตอน
2. ครูยกตัวอย่าง $(-5)^{\frac{4}{4}} = \sqrt[4]{(-5)^4}$ และ $(-5)^{\frac{4}{4}} = \sqrt[4]{(-5)}^4$ พร้อมสุ่มถาม นตท.จำนวน ๗ – ๘ นาย ว่า เหมือนหรือต่างกัน และอย่างไร
3. ครูสุ่มถาม นตท.จำนวน ๗ – ๘ นาย ว่า ข้อควรคำนึงถึงคืออะไร
4. ครูเขียนนิยาม “รากที่ n ” บนกระดาน
5. ครูยกตัวอย่าง

ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันบอกข้อสรุป สรุปเนื้อหา นิยาม รากที่ n
2. ครูเขียนสรุปบนกระดานอีกครั้ง

สื่อการสอน

เอกสารประกอบการเรียนเสริม , แผนการสอนของครู

- **กิจกรรม การสอนเนื้อหาเลขยกกำลัง – คุณสมบัติ ของ รากที่ n**

ขั้นนำ

1. ครูสุ่มถามนักเรียน ๓-๕ นาย ว่า “นตท.คิดว่าโจทย์ข้อนี้ $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{80}$ สามารถจัดเป็นรูปแบบ ที่ง่ายกว่านี้ ได้หรือไม่ หากทำได้ใช้วิธีใด?? ”

ขั้นสอน

1. ครูยกโจทย์ตัวอย่างที่ 1.1 ,1.4 โดยแนะให้ นตท.ใช้คุณสมบัติจากเรื่องเลขยกกำลังมาแก้ปัญหาโจทย์

2. ครูกระตุ้นนตท. ด้วยการให้ นตท. บอกสิ่งที่ครูจะเขียนบนกระดาน และพร้อมๆกับครูอธิบายให้นักเรียนเข้าใจในแต่ละขั้นตอน
3. ครูสุ่ม นตท. ๓ – ๕ นาย ออกมาทำข้อที่เหลือ บนกระดานดำ จากนั้นครูอธิบายขั้นการทำของ นตท. ในแต่ละข้อ

ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหา“คุณสมบัติ ของ รากที่ n”
2. ครูเขียนสรุปบนกระดานอีกครั้งหนึ่ง

สื่อการสอน

เอกสารประกอบการเรียนเสริม , แผนการสอนของครู

- **กิจกรรม การสอนเนื้อหาเลขยกกำลัง- รากที่ 2 ของนิพจน์** $(a+b)\pm 2\sqrt{ab}$

ขั้นนำ

1. ครูสุ่มถามนักเรียน ๓-๕ นาย ว่า “เราสามารถใช้รูปแบบอื่นได้อีกหรือไม่ นอกจากวิธีจัดรูป $(m+n)\pm 2\sqrt{mn}$ ที่ง่ายกว่าวิธีนี้ ??? ”

ขั้นสอน

1. ครูยกโจทย์ตัวอย่างที่4.1 ,4.2 และกระตุ้นนตท. โดยให้ นตท. บอกสิ่งที่ครูจะเขียนบนกระดาน และพร้อมๆกับอธิบายให้นักเรียนเข้าใจในแต่ละขั้นตอน
2. ครูสุ่ม นตท. ๓ – ๕ นาย ออกมาทำข้อ4.3 - 4.7 บนกระดานดำ จากนั้นครูอธิบายขั้นการทำของ นตท ในแต่ละข้อ

ขั้นสรุป

3. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเนื้อหาเลขยกกำลัง(รากที่ 2 ของนิพจน์)
4. ครูเขียนสรุปบนกระดานอีกครั้งหนึ่ง
5. ครูสั่งให้ นตททำ**แบบฝึกหัด 1** ส่ง

สื่อการสอน

เอกสารประกอบการเรียนเสริม , แผนการสอนของครู

- **การวัดและประเมินผล**

การวัดผล	การประเมินผล
๑. ใช้วิธีการเรียกให้ตอบ	๑. นตท. สามารถตอบคำถามผิดไม่เกิน ร้อยละ ๑๕ (๓ คน จากประมาณ ๒๐ คน)
๒. ทำแบบฝึกหัด(แบบฝึกหัดที่ ๒)	๒. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัด ได้ถูกต้องมากกว่า ร้อยละ ๘๕ (๑๗ จาก ๒๐ ข้อ)

๒. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ และ m,n เป็นจำนวนเต็มโดย หรม ของ m และ n มีค่าเท่ากับ 1 จะได้ว่า

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^{m}$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$64^{\frac{2}{3}} = (64^{\frac{1}{3}})^{2}$$

$$4^{\frac{3}{5}} = (4^{\frac{1}{5}})^{3}$$ เป็นต้น

๓. การแก้สมการเกี่ยวกับจำนวนติดกรณฑ์

<u>เนื้อหา</u>

การแก้สมการเกี่ยวกับจำนวนติดกรณฑ์ หลักการคือ**พยายามทำให้เครื่องหมายกรณฑ์หมดไป โดยทั่วไปมักนิยมใช้วิธีการยกกำลัง** ซึ่งจะทำให้สมการที่ได้ใหม่ ไม่สมมูลกับสมการเดิม ทำให้ได้คำตอบเกิน ดังนั้นจะต้อง**นำคำตอบมาตรวจสอบ**ทุกครั้ง

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $2\sqrt{x+7} = 3x$

<u>วิธีทำ</u> $2\sqrt{x+7} = 3x$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $4(x+7) = 9x^2$

$4x+14 = 9x^2$

$9x^2 - 4x - 14 = 0$

$(9x+14)(x-2) = 0$

$X = -\frac{14}{2}, 2$

<u>ตรวจคำตอบ</u> ถ้า $x = 2$; $2\sqrt{2+7} = 2(3) = 6$

$3(2) = 6$

ดังนั้น $x = 2$ เป็นคำตอบ

ถ้า $X = -\frac{14}{9}$;

$$2\sqrt{-\frac{14}{9}+7} = 2\sqrt{\frac{-14+63}{9}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{49}{9}}$$

$$= 2(\frac{7}{3})$$

$$= \frac{14}{3}$$

และ $3(-\frac{14}{9}) = -\frac{14}{3}$

จะเห็นว่า $\frac{14}{3} \neq -\frac{14}{3}$

ดังนั้น $x = -\frac{14}{9}$ ไม่เป็นคำตอบ

ตัวอย่าง จงหาคำตอบต่อไปนี้

1. $\sqrt{12x+1} = 7$

2. $7\sqrt{3x-5} = 28$

3. $2\sqrt{x} - 1 = \sqrt{4x-1}$

4. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-11} = \sqrt{x-16}$

5. $3\sqrt{x^3+8} - x = 2$

6. $x^2 + 6\sqrt{x^2-2x+5} = 11+2x$

7. $\sqrt{3x^2-7x-30}+\sqrt{2x^2-7x-5} = x+5$

8. $\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{x-5}$

9. $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{3\sqrt{x}-5}{3\sqrt{x}-13}$

10. $9x - 3x^2 + 4\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 11$

- **กิจกรรม การสอนเนื้อหาการแก้สมการเกี่ยวกับจำนวนติดกรณฑ์**

ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้"เพื่อให้ นตท.สามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนที่ติดกรณฑ์ได้"
2. ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่า"หัวข้อส่วนใหญ่จะเป็นการจัดรูปให้อยู่ในรูปอย่างง่าย หรือหาค่าในรูปแบบต่างๆ ทีมีตัวแปรเข้ามาเกี่ยวข้องเหมือนกับเลขชี้กำลังที่ทั้งการทำให้เป็นรูปอย่างง่าย และการแก้สมการเลขยกกำลัง เช่นกันกับเรื่องนี้ ครูอธิบายวิธีการต่างๆที่ใช้ในการแก้สมการ
3. ครูยกตัวอย่าง โจทย์ สมการ $\sqrt{x+7} = 5$ และแสดงวิธีทำบนกระดาน พร้อมทั้งกระตุ้นให้ นตททั้งชั้นบอกวิธีทำในแต่ละขั้นตอนด้วย
4. ครูยกตัวอย่าง โจทย์ สมการ $\sqrt{x} = x$ และแสดงวิธีทำบนกระดาน พร้อมทั้งกระตุ้นให้ นตท.ทั้งชั้นบอกวิธีทำในแต่ละขั้นตอนด้วยโดยเน้นที่การตรวจคำตอบ

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่าง สมการเสิร์ดอย่างง่ายๆ บนกระดาน

   เช่น $\sqrt{x} = 2$

   $x = 2^2$

   $= 4$

   พร้อมกับให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันหาคำตอบ โดยวิธีบอกครู
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปหลักง่ายๆในการแก้สมการเสิร์ด โดยการสุ่มถาม นตท. ๒ – ๓ นาย
3. ครูยกตัวอย่าง สมการเสิร์ดแบบต่อไป (ตัวอย่างที่ ๒)

   <u>**เช่น**</u> จงแก้สมการ $2\sqrt{x+7} = 3x$

   <u>วิธีทำ</u> $2\sqrt{x+7} = 3x$

   ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $4(x+7) = 9x^2$

   $4x+14 = 9x^2$

   $9x^2 - 4x - 14 = 0$

   $(9x+14)(x-2) = 0$

   $X = -\dfrac{14}{2}, 2$

<u>ตรวจคำตอบ</u> กรณี $x = 2$; $2\sqrt{2+7} = 2(3) = 6$

$3(2) = 6$

ดังนั้น $x = 2$ เป็นคำตอบ

กรณี $X = -\frac{14}{9}$;

$$2\sqrt{-\frac{14}{9}+7} = 2\sqrt{\frac{-14+63}{9}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{49}{9}}$$

$$= 2(\frac{7}{3})$$

$$= \frac{14}{3}$$

และ $3(-\frac{14}{9}) = -\frac{14}{3}$

จะเห็นว่า $\frac{14}{3} \neq -\frac{14}{3}$

ดังนั้น $x = -\frac{14}{9}$ ไม่เป็นคำตอบ

4. ครูกระตุ้น นตท.ทั้งชั้นเรียน ให้ช่วยกันบอกแต่ละขั้นตอน ระหว่างทำโจทย์
5. ครูแสดงการตรวจคำตอบและให้ชี้ให้เห็นผลลัพธ์ที่ได้จากการตรวจคำตอบ
6. ครูยกตัวอย่างที่ 3 $x^2 + 6\sqrt{x^2-2x+5} = 11+2x$ และ ตัวอย่างที่ 4 .
   $\sqrt{3x^2-7x-30} + \sqrt{2x^2-7x-5} = x+5$ โดยสุ่ม เรียก นตท.ให้ นตท. แก้สมการ โดยถามทีละคนและตอบทีละขั้นตอน
7. ครูยกตัวอย่างที่ 5 $\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{x-5}$ จากนั้น

   - แสดงการแก้สมการ ด้วยวิธียกกำลังสองข้างและแสดงให้ นักเรียน เห็นว่าได้สมการที่ยุ่งยากซับซ้อน ยากต่อการแก้สมการ
8. จากตัวอย่างที่ 5 ครูซึ่งชี้ให้นักเรียนดู ว่า ถ้าเราจัดรูปสมการโจทย์โดยสังเกตจากตัวอย่างที่ครูแสดงหน้ากระดาน จากนั้นครู สรุปพร้อมกับนักเรียนว่า

   สมการที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายราก โดยเราจะย้ายพจน์ที่ผลบวกของจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายราก ทั้งสองเท่ากันให้อยู่ข้างเดียวกัน

   - แสดงการแก้สมการ ด้วยวิธีปรับรูปสมการ และแสดงให้ นักเรียน เห็นว่าได้สมการที่ยุ่งยากซับซ้อน ยากต่อการแก้สมการ

9. จากตัวอย่างที่5 ถ้าเรายกกำลังสองทั้งสองข้างก็จะยุ่งยากจึงใช้วิธีการตั้งเอกลักษณ์ใหม่ โดยพิจารณาจากพหุนามที่อยู่ในเครื่องหมายรากทั้ง 2 และให้สังเกตพหุนามทั้ง2 นั้นว่าพจน์ที่มีตัวแปร x อยู่ มาบวกลบกันแล้วหมดไปเหลือแต่จำนวนเต็ม

ขั้นสรุป

1. ครูกระตุ้นให้นตท.ช่วยกันสรุปหลักการง่ายๆของการแก้สมการว่า กำจัดสิร์ดให้หมดไปด้วยวิธีการยกกำลัง
2. ครูเขียนสรุปบนกระดานอีกครั้ง

สื่อการสอน

เอกสารประกอบการเรียนเสริม , แผนการสอนของครู

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. การเรียกถามตอบ	1. นตท. สามารถตอบคำถามได้ถูกต้องมากกว่าร้อยละ ๘๕ ของจำนวนผู้ตอบ
2. ทำแบบฝึกหัด(แบบฝึกหัดที่2)	2. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัด ได้ถูกต้องมากกว่าร้อยละ ๘๕ (๑๗ จาก ๒๐ ข้อ)

๖. อาจารย์ให้นตท. ทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง

กิจกรรม

1. ครูสั่งให้นตททำแบบฝึกหัดครึ่งหนึ่งในห้องเรียน
2. ครูเดินดูการทำแบบฝึกหัด ให้ทั่วทั้งชั้นเรียน
3. ครูสั่งให้ นตททำเป็นการบ้าน

สื่อการสอน

เอกสารประกอบการเรียนเสริม

- **การวัดและประเมินผล**

การวัดผล	การประเมินผล
๑. ทำแบบฝึกหัดที่สั่งในชั้นเรียน	๑. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัด ได้ถูกต้องมากกว่าร้อยละ ๘๕
๒. ทำแบบฝึกหัดที่สั่งเป็นการบ้าน	๒. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัด ได้ถูกต้องมากกว่าร้อยละ ๘๕

แบบฝึกหัดที่ 1

1) จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1) $\left(\dfrac{2^{-2}a^3b^{-2}}{2a^{-2}b^3}\right)^{-2}$

2) $\left(\dfrac{5a^{-1}b^2}{2c^{-3}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{ab^{-1}}{c^2}\right)$

3) $\left(\dfrac{x^{-5}y^4}{x^2y^{-2}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x^4y^{-5}}{x^3y^{-7}}\right)^{-3}$

4) $\left(\dfrac{a^{-1}b^{-2}}{c^3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{a^{-4}b^2}{c^{-3}}\right)^2$

5) $\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}$

6) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{(ab)^{-1}}$

7) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(a+b)^{-1}}$

8) $(64)^{n-1}\bullet(32)^{2-2n}\bullet(8)^{1+n}$

9) $\dfrac{3\cdot2^n+\ \ 4\cdot2^{n-2}}{2^n-\ \ 2\cdot2^n}$

10) $\dfrac{9\cdot3^{n+1}+\ \ 2\cdot3^{n+2}}{3^{n+2}-\ \ 2\cdot3^{n-1}}$

11) $\dfrac{3^{n+3}}{(35)^{1-n}}\cdot\dfrac{(21)^{-n+2}}{5^{n-1}}$

12) $\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^{m}\left(x-\dfrac{1}{y}\right)^{n}}{\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^{m}\left(y-\dfrac{1}{x}\right)^{n}}$

13) $\dfrac{9^{2}(27)^{2-n}}{(81)^{-n}(27)^{3}3^{n-1}}$

14) $\dfrac{4^{2n}\cdot\left(4^{2n-1}\right)^{2n}}{4^{n+3}\cdot 4^{3n-3}}\cdot\dfrac{1}{16^{2n^{2}-2n}}$

15) $\dfrac{2\cdot 2^{2n+3}-24\cdot 2^{2n-2}}{10\left(2^{n}\right)^{2}}$

16) $\dfrac{9^{-n+2}\cdot 3^{2n+1}\cdot 81^{n+1}}{3^{4n+4}}$

17) $\dfrac{2^{n}\cdot\left(2^{n-1}\right)^{n}}{2^{n+1}\cdot 2^{n-1}\cdot 4^{-n}}$

18) $\dfrac{(60{,}000)^{3}(0.0002)^{4}}{(72{,}000{,}000)(100)^{2}(0.0002)^{5}}$

19) $\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\dfrac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\dfrac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$

20) $\left(\dfrac{1+ax^{-1}}{a^{-1}-x^{-1}}\right)\left(\dfrac{a^{-1}-x^{-1}}{xa^{-1}-ax^{-1}}\right)\div\left(\dfrac{ax^{-1}}{x-a}\right)$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1

1. $64\left(\dfrac{b}{a}\right)^{10}$	2. $\dfrac{2a^{2}}{5b^{3}c^{5}}$	3. $\dfrac{1}{x^{10}}$	4. $\dfrac{1}{a^{10}}$
5. $\dfrac{1}{a^{2}}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^{2}}$	6. $b-a$	7. $\dfrac{(a+b)^{2}}{ab}$	8. $\dfrac{128}{2^{n}}$
9. -4	10. $\dfrac{27}{5}$	11. 1,701	12. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{m+n}$
13. 9	14. 1	15. 1	16. 243
17. $2^{n^{2}}$	18. 1.5×10^{6}	19. 1	20. x

แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาเซตคำตอบต่อไปนี้

1.1 $6 = \sqrt{4+3x}+\sqrt{x}$

1.2 $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$

2. ค่าของ y จากสมการ $\sqrt{y-2+\sqrt{2y-5}}+\sqrt{y+2+3\sqrt{2y-5}} = 7\sqrt{2}$ มีค่าเท่าใด จงแสดงวิธีทำ

3. จงแก้สมการ $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}} = 2\frac{1}{6}$

4. จงหาผลบวกของสมาชิกในเซต $A = \{x \in R \mid 2x^2+3 = 7x+3\sqrt{2x^2-7x+7}\}$

5. จงหาค่า x จาก $\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+4} = 2$

6. ถ้า a เป็นคำตอบของสมการ จงหาค่าของ

$\sqrt{4x^2+8x-28}+\sqrt{3x^2+8x-24} = x+2$

7. จงหาค่า x จาก $\sqrt[3]{x^2+11}-3 = 0$

8. ถ้า s = $\{x \in R \mid 2x^2-6x+11+2\sqrt{x^2-3x+5} = 25\}$ แล้วผลบวกของสมาชิกใน s มีค่าเท่าใด จงแสดงวิธีทำ

9. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}+1 = 0$ จงหาค่า x

10. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt[5]{(x+2)^2-(2x+3)}-2\sqrt[5]{x+1}-3 = 0$

จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

11. $x^{\frac{4}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}+4 = 0$

12. $6x^{\frac{1}{2n}} - x^{\frac{1}{n}} - 8 = 0$

13. $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 20 = 0$

14. $x^{\frac{1}{4}} - 8x^{-\frac{1}{4}} = 2$

15. $2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} = 2$

16. $3^{2x} + 3^{x+1} = 4$

17. $6\cdot 2^{5x} + 11\cdot 2^{3x} - 3\cdot 2^{x} = 2^{5x+1}$

18. $4\cdot 3^{2x} + 9\cdot 2^{2x} = 13\cdot 6^{x}$

19. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

20. $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = \frac{7}{8}$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2

1.1 4	1.2 6		
2. 15	3. $\frac{4}{13}$ หรือ $\frac{9}{13}$	4. $\frac{9}{2}$ หรือ -1	
5. 1 หรือ 4	6. 2	7. ± 4	8. 3
9. ไม่มีคำตอบ	10. -2 , 242	11. ± 1 , ± 8	12. 16^{n} , 4^{n}
13. -64 หรือ 125	14. 256	15. 0	16. 0
17. -1	18. 0 หรือ 2	19. $\frac{1}{4}$	20. -4

องค์ความรู้วิชาคณิตศาสตร์ในการดำเนินการ จัดการเรียนรู้ งป๕๔

เรื่อง “ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล” ชั้นปีที่ ๓

กองวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการศึกษาโรงเรียนเตรียมทหาร

ชื่อองค์ความรู้

เอกซ์โปเนนเชียล ศึกษาบทนิยาม การเขียนกราฟ และสามารถบอกฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดได้

วัตถุประสงค์

๑๖. พัฒนาองค์ความรู้ของนตท. ที่มีผลระดับคะแนนที่ต่ำ

๑๗.เพิ่มทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์

๑๘.ส่งเสริมเจตคติที่ดีในกลุ่มสาระวิชาคณิตศาสตร์

หลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑๕.กำหนดขอบเขตองค์ความรู้ที่นตท. ต้องผ่านการประเมิน

๑๖. ประเมินความรู้เดิมในเนื้อหาเลขยกกำลัง

๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล กับการแก้โจทย์ปัญหา

๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตทไม่เข้าใจ อย่างละเอียด

๕. อาจารย์สอนเนื้อหาฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล โดยเน้นการแก้โจทย์ปัญหเป็นหลัก

๖. อาจารย์ให้นตท. ทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง

วิธีดำเนินการ

ทำการสอนวันพุธที่๑๐ สิงหาคม ๒๕๕๔ เวลา ๑๙๓๐ – ๒๑๓๐ น

การประเมินผล

ประเมินองค์ความรู้ด้วยโจทย์ปัญหา

แหล่งอ้างอิง

๑. เอกสารประกอบการเรียนรู้การสอนซ่อมเสริม

๒. แบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ภาคผนวก

๑๑. ใบงาน

๑๒.แบบฝึกหัดเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

รายละเอียดหลักการและแนวทางในการดำเนินการสอน

๑. ขอบเขตองค์ความรู้ที่ นตท. ต้องผ่านการประเมิน ประกอบด้วย

๑. นตท. สามารถบอกนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลได้

๒. นตท. สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลได้

๓. นตท. สามารถบอกได้ว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

๒. ประเมินความรู้เดิมในเรื่องเลขยกกำลัง

๑. การหาค่าของเลขยกกำลัง

$2^{-3} =$ $3^{-3} =$ $4^{-3} =$

$2^{-2} =$ $3^{-2} =$ $4^{-2} =$

$2^{-1} =$ $3^{-1} =$ $4^{-1} =$

$2^{0} =$ $3^{0} =$ $4^{0} =$

$2^{1} =$ $3^{1} =$ $4^{1} =$

$2^{2} =$ $3^{2} =$ $4^{2} =$

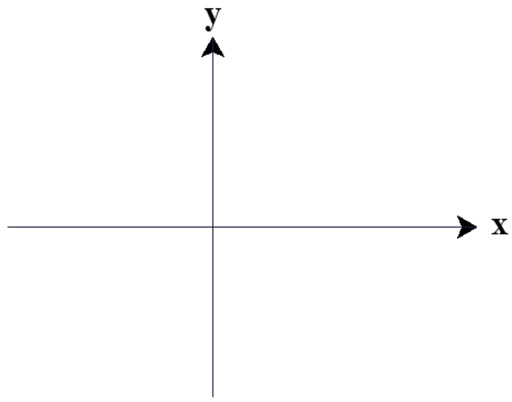
$2^{3} =$ $3^{3} =$ $4^{3} =$

๒. การเขียนกราฟ

จงเขียนกราฟของ

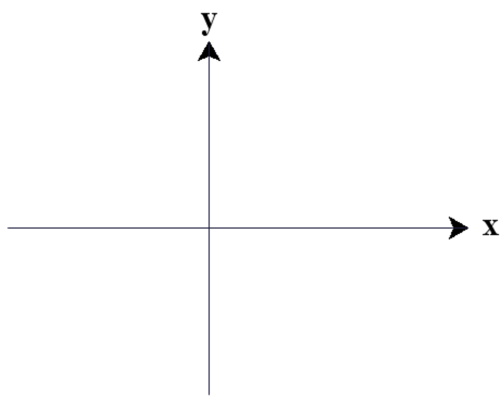
y = 2x + 1

x					
y					



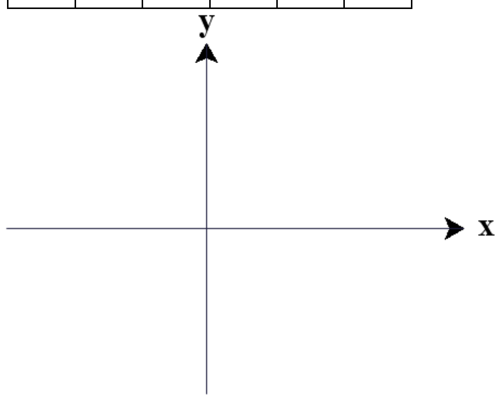
y = x

x					
y					



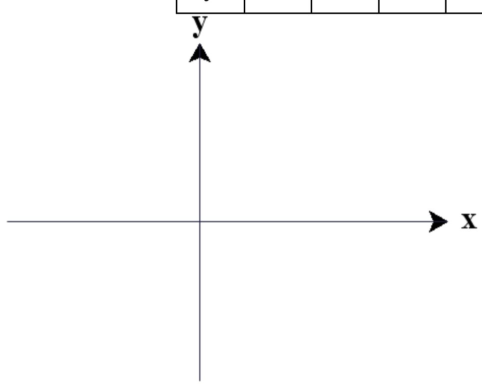
y = 3-2x

x					
y					



y = -2x+3

x					
y					



เฉลย ประเมินความรู้เดิมในเรื่องเลขยกกำลัง

๑. การหาค่าของเลขยกกำลัง

$2^{-3} = \frac{1}{8}$ $3^{-3} = \frac{1}{27}$ $4^{-3} = \frac{1}{64}$

$2^{-2} = \frac{1}{4}$ $3^{-2} = \frac{1}{9}$ $4^{-2} = \frac{1}{16}$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $3^{-1} = \frac{1}{3}$ $4^{-1} = \frac{1}{4}$

$2^{0} = 1$ $3^{0} = 1$ $4^{0} = 1$

$2^{1} = 2$ $3^{1} = 3$ $4^{1} = 4$

$2^{2} = 4$ $3^{2} = 9$ $4^{2} = 16$

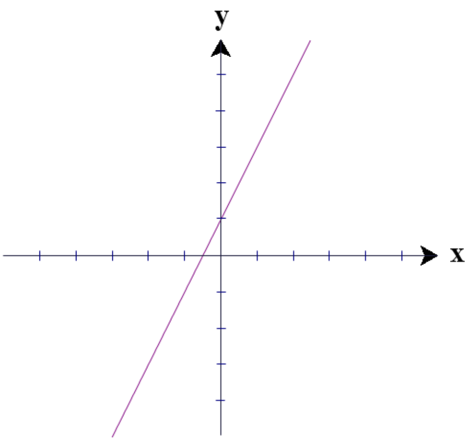
$2^{3} = 8$ $3^{3} = 27$ $4^{3} = 64$

๒. การเขียนกราฟ

จงเขียนกราฟของ

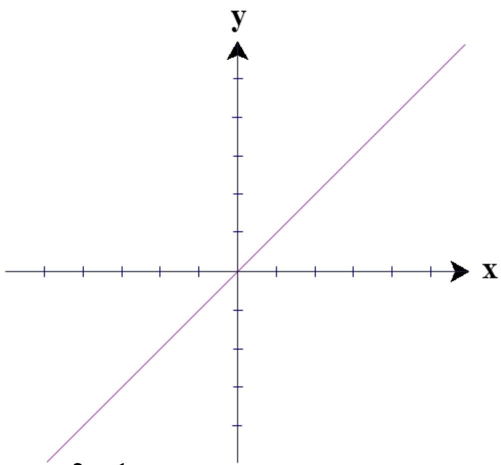
y = 2x + 1

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5



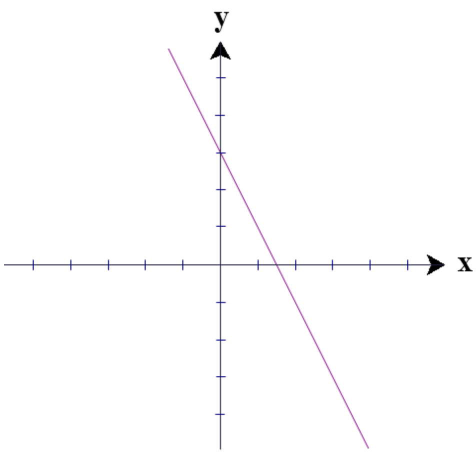
y = x

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	1	2



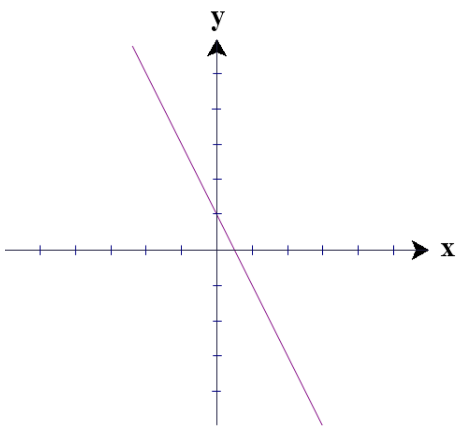
y = 3-2x

x	-2	-1	0	1	2
y	7	5	3	1	-1



y = -2x+1

x	-2	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1	-3



๓. เชื่อมโยงองค์ความรู้เรื่องเลขยกกำลังและการเขียนกราฟ

๑. ทำการยกตัวอย่างเลขยกกำลัง คือ

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

นิยาม $a^n = \underbrace{a\bullet a\bullet a\bullet\ldots\bullet a}_{n \text{ ตัว}}$ เมื่อ $a \varepsilon R$ และ $n \varepsilon I^+$

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง

เรียก a ว่า ฐานของเลขยกกำลัง

เรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

เช่น $2^4 = \underbrace{2\bullet 2\bullet 2\bullet 2}_{4 \text{ ตัว}}$

เรียก 2^4 ว่า เลขยกกำลัง

เรียก 2 ว่า ฐานของเลขยกกำลัง

เรียก 4 ว่า เลขชี้กำลัง

๒. การเขียนกราฟ

กราฟเส้นตรง $y = mx + c$ เมื่อ m คือ ความชัน และ c คือ ค่าคงที่

เช่น $y = 2x + 1$

ขั้นตอนการวาดกราฟ คือ

๑. แทนค่า x เพื่อหาค่า y ในสมการ $y = 2x + 1$ เพื่อหาคู่อันดับ5 คู่ โดยกำหนดค่าx เป็น 0 และจำนวนเต็มที่ใกล้เคียง0 เช่น 1 , 2 , -1 ,-2 เป็นต้น ดังตาราง

x	-2	-1	0	1	2
y					

๒. คำนวณค่าy จากค่า x ในขั้นตอนที่๑ ดังนี้

เมื่อ $x = -2$ จะได้ $y = 2(-2) + 1 = -3$

$x = -1$ จะได้ $y = 2(-1) + 1 = -1$

$x = 0$ จะได้ $y = 2(0) + 1 = 1$

$x = 1$ จะได้ $y = 2(1) + 1 = 3$

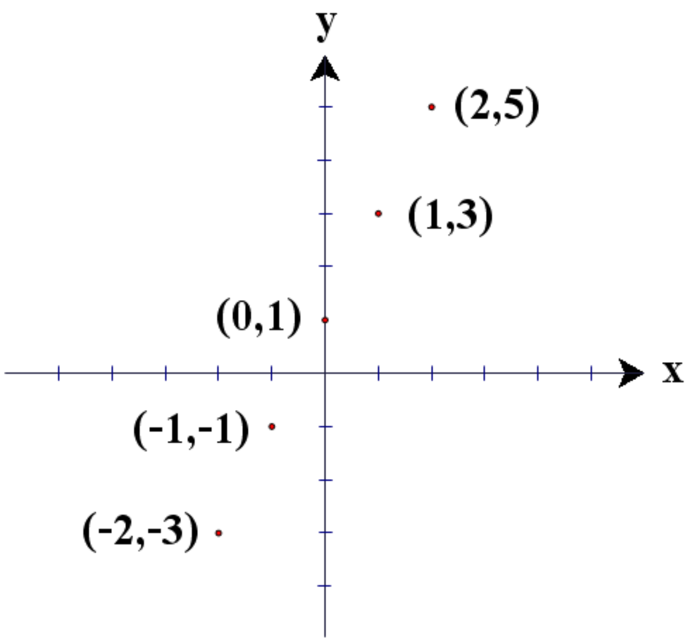
$x = 2$ จะได้ $y = 2(2) + 1 = 5$

จะได้ค่าดังตาราง

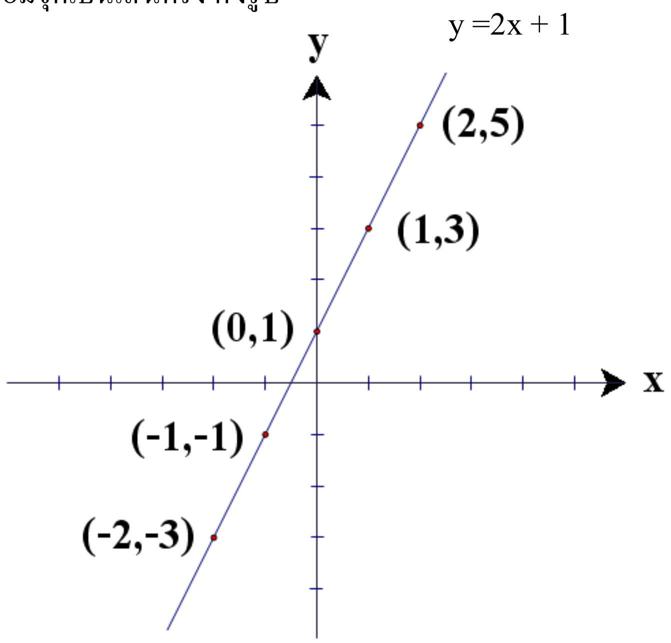
x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

๓. จะได้จุดที่จะนำไปลงบนกราฟได้5 จุด คือ (-2,-3) , (-1,-1) , (0,1) , (1,3) และ (2,5)

๔. นำจุดทั้ง5 จุด ที่ได้ในขั้นตอนที่๓ ไปลงจุดบนกราฟ ดังรูป



๕. ทำการเชื่อมจุดเป็นเส้นตรง ดังรูป



๔. อาจารย์อธิบายเนื้อหาในส่วนที่ นตท.ไม่เข้าใจ อย่างละเอียดโดยมีแผนการสอนดังนี้

การเขียนกราฟฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

ในการเขียนกราฟของฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล จะเริ่มด้วยการสร้างตารางค่าของฟังก์ชัน เมื่อกำหนดค่าx จำนวนหนึ่ง(ส่วนมากจะกำหนด5 ค่า) เช่น $y = 2^x$ โดยมีวิธีการดังนี้

๑. กำหนดค่าx จำนวน5 ค่า ดังตาราง

x	-2	-1	0	1	2
y					

๒. แทนค่า x ทั้ง5 ค่าในสมการ เพื่อหาค่า y ดังนี้

เมื่อ x = -2 จะได้ $y = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

x = -1 จะได้ $y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

x = 0 จะได้ $y = 2^{0} = 1$

x = 1 จะได้ $y = 2^{1} = 2$

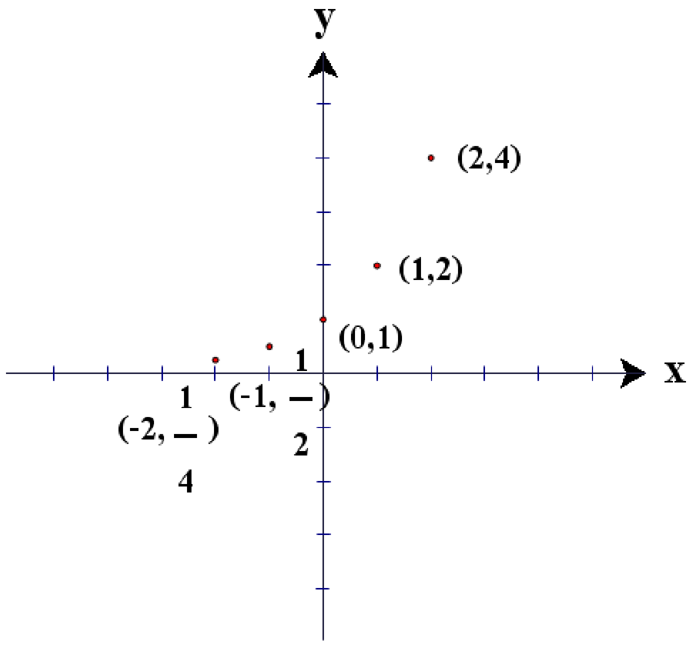
x = 2 จะได้ $y = 2^{2} = 4$

๓. นำค่าy ที่ได้ไปเขียนในตาราง

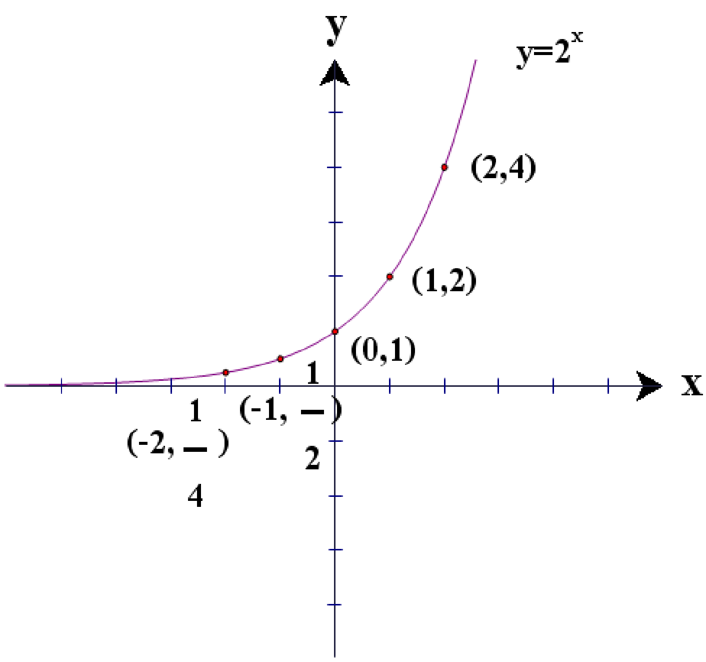
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

๔. ค่า x และ y ที่ได้ทั้ง5 คู่ คือพิกัดจุดบนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลทั้ง5 จุด คือ (-2 , $\frac{1}{4}$) , (-1, $\frac{1}{2}$) , (0,1) , (1,2) และ (2,4)

๕. นำจุดทั้ง5 จุดไปเขียนลงบนกราฟ ดังรูป



๖. จากนั้นทำการลากเส้นผ่านจุดทั้ง 5 จุด เป็นเส้นโค้ง โดยที่เส้นโค้งไม่ตัดแกนx เนื่องจาก $2^x \geq 0$ เสมอ ดังรูป



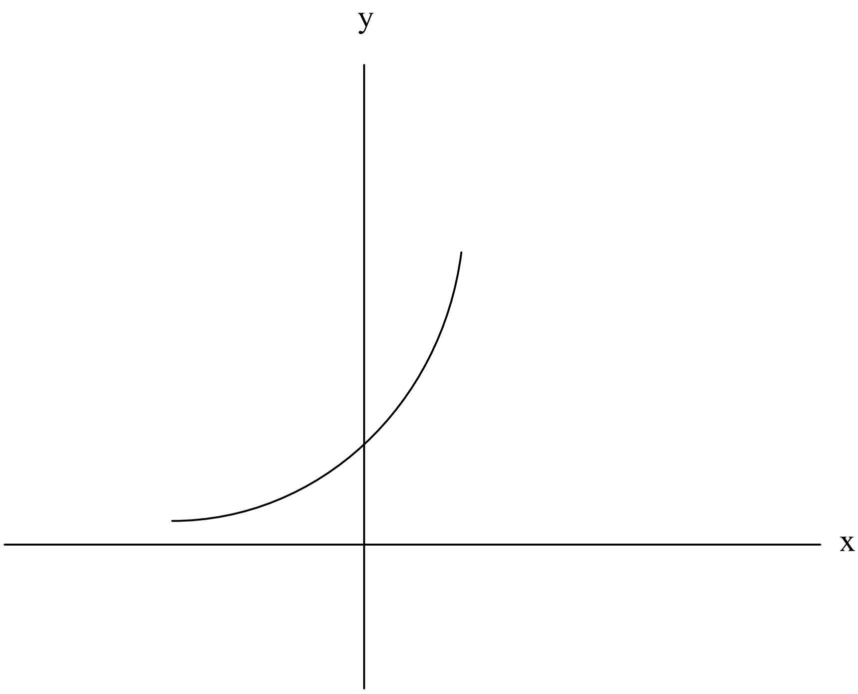
๕. **อาจารย์สอนเนื้อหาฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล** โดยมีแผนการสอนดังนี้

เนื้อหา

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

เราจะพิจารณาเรื่องเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริง และเพื่อช่วยให้สามารถเข้าใจได้ดีขึ้นลองพิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$ เมื่อ x เป็นจำนวนตรรกยะ

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



จะเห็นว่า กราฟ $y = 2^x$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าของy จะเพิ่มขึ้นเร็วมาก

ฟังก์ชัน $y = 2^x$ เป็นตัวอย่างหนึ่งของฟังก์ชันที่มีชื่อว่า **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล** ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือฟังก์ชัน

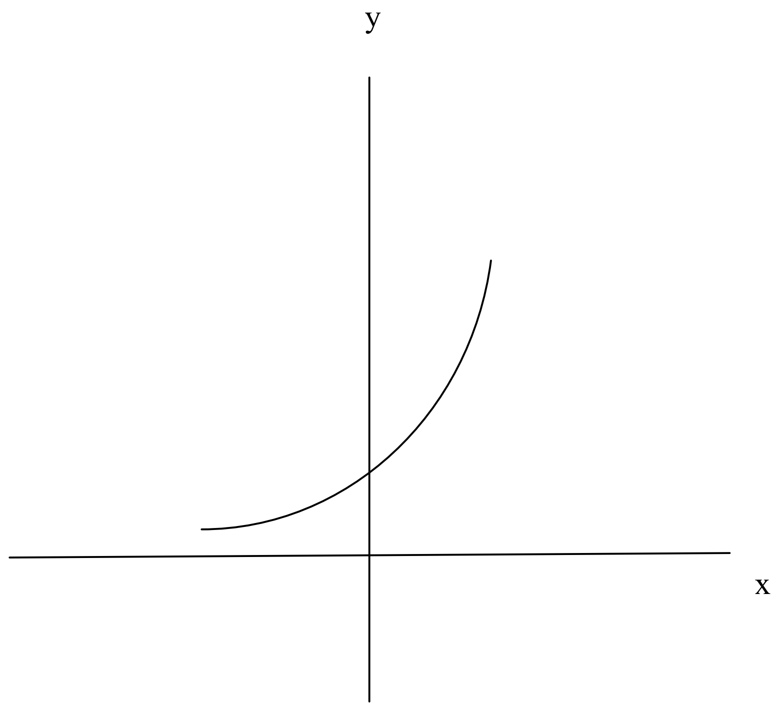
$f = \{(x, y) \in R \times R^+ \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

ข้อสังเกต ๑. $y = 1^x$ เป็นฟังก์ชันคงตัว เพราะว่า $1^x = 1$ ไม่เรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

๒. โดเมนของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือR

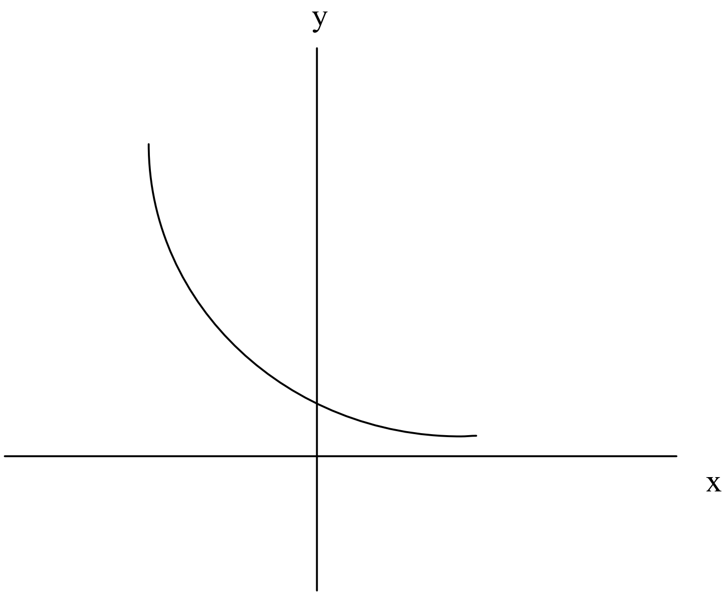
ตัวอย่าง กราฟของฟังก์ชัน $y = 3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



จากกราฟจะพบว่า เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจากน้อยไปมากบนแกน x จุด $(x, 3^x)$ จะเปลี่ยนตำแหน่งควบคู่ตามไปด้วย โดยที่ค่าของ 3^x เปลี่ยนจากน้อยไปมากอย่างต่อเนื่องกัน เส้นกราฟของฟังก์ชัน $y = 3^x$ จะเป็นกราฟเส้นเดียวไม่ขาดตอน นอกจากนี้จะเห็นว่าค่าของ 3^x เพิ่มเร็วมากเมื่อ x มีค่าเป็นจำนวนบวกมากขึ้น และจะค่อยๆ ลดลงเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ x เป็นจำนวนลบและน้อยลงเรื่อย ๆ ด้วยเหตุนี้เรนจ์ของฟังก์ชัน $y = 3^x$ จึงเป็นช่วงเปิด $(0,\infty)$ หรือ R^+ และเนื่องจากเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจะได้ค่า y เพิ่มขึ้น ฟังก์ชัน $y = 3^x$ จึงเป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม**ในโดเมนของฟังก์ชันซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = (\frac{1}{3})^x$



เมื่อพิจารณากราฟที่ได้ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น y จะมีค่าลดลง ฟังก์ชัน $y = (\frac{1}{3})^x$ จึงเป็นฟังก์ชันลดในโดเมนของฟังก์ชันซึ่งคือเซตของจำนวนจริง ในกรณีนี้ก็จะเรียก $y = (\frac{1}{3})^x$ เป็น**ฟังก์ชันลด**

ข้อสังเกต

๑) กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x$, $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะผ่านจุด (0,1) เสมอ ทั้งนี้เพราะ $a^0 = 1$

๒) ถ้า $a > 0$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และกราฟ $y = a^x$ ไม่แดแกน x แต่เข้าใกล้เส้นตรง $y = 0$ เมื่อ x มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีนี้กล่าวได้ว่า เส้นตรง $y = 0$ หรือแกน x เป็นเส้นกำกับแนวนอน

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด และกราฟ $y = a^x$ ไม่ตัดแกน x แต่เข้าใกล้เส้นตรง $y = 0$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้ กล่าวได้ว่า เส้นตรง $y = 0$ หรือแกน x เป็นเส้นกำกับ แนวนอน

๓) ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก R ไปทั่วถึง R^+

๔) โดยสมบัติของฟังก์ชัน 1 – 1 จะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ x = y

กิจกรรม

ขั้นนำ

๑. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันพีชคณิต ดังนี้

$y = 2x + 1$

$y = x^2$

แล้วถามนักเรียนว่าฟังก์ชันเหล่านี้ เราเรียกว่าอะไร

๒. นักเรียนช่วยกันตอบคำถามขั้นนำที่1

๓. ครูเขียนตัวอย่างบนกระดาน

$y = x^2$

$y = (\sqrt{5})^x$

$y = (\frac{1}{3})^x$

ถามนักเรียนว่าแล้วฟังก์ชันนี้เรียกว่าอะไร

๔. นักเรียนช่วยกันตอบแล้วถามว่านักเรียนสังเกตข้อแตกต่างระหว่างฟังก์ชัน2 กลุ่มได้อย่างไร

ขั้นสอน

1. ครูวาดรูปที่ 1. ในบทนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลพร้อมทั้งยกตัวอย่างที่1
2. ครูถามนักเรียนว่าทำไมในบทนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลต้องมีฐาน(a)
3. นักเรียนช่วยกันตอบ
4. เขียนรูปที่ 2 เนื้อหาเป็นการสรุปข้อสังเกตในขั้นนำ
5. ครูยกตัวอย่างที่2 ให้นักเรียนช่วยเขียนกราฟโดยเรียกนักเรียนทีละคนช่วยหาค่าฟังก์ชันค่าy ทีละตัว ตามที่กำหนดให้ เมื่อครบทุกค่าตัวเป็นx ให้นักเรียนกลับไปดูที่นิยาม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งจะเห็นว่าเป็นเซตของคู่อันดับค่าx , y ให้นักเรียนลงจุดของกราฟ
6. ครูยกตัวอย่างที่3 และมีกิจกรรมเหมือนขั้นสอนที่5
7. ครูให้นักเรียนสังเกตตัวอย่างที่2 และ 3 ทีละตัวอย่างดังนี้ ถ้า x มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆค่าy แต่ละตัวเป็นอย่างไร
8. นักเรียนช่วยกันสรุปข้อสังเกตดังกล่าวและครูบอกว่าฟังก์ชันใดคือ ฟังก์ชันเพิ่ม
9. ครูเขียนสรุปโดยนักเรียนช่วยกันบอก
10. จากตัวอย่างที่1 ครูถามนักเรียนว่าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

ขั้นสรุป

๑. ครูให้นตท.ช่วยกันสรุปฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคุณสมบัติต่างๆ

๒. นักเรียนช่วยกันบอกลักษณะของกราฟฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลทั้งฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด

สื่อการสอน

๑. แบบเรียนเสริมคณิตศาสตร์

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
๑. การเรียกถามตอบ ๒. ตรวจแบบฝึกหัดจากใน แบบเรียน	๑. นตท. สามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง๘๐% ขึ้นไป ๒. นตท. สามารถทำแบบฝึกหัดในแบบเรียนเสริมได้ถูกต้องมากกว่า๑๒ ข้อ จาก๑๕ ข้อ

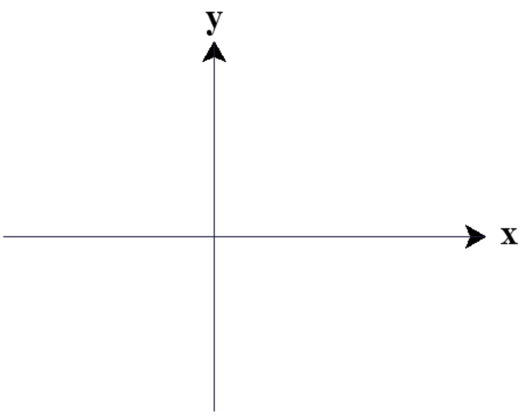
๖. **แบบฝึกหัด ดังนี้**

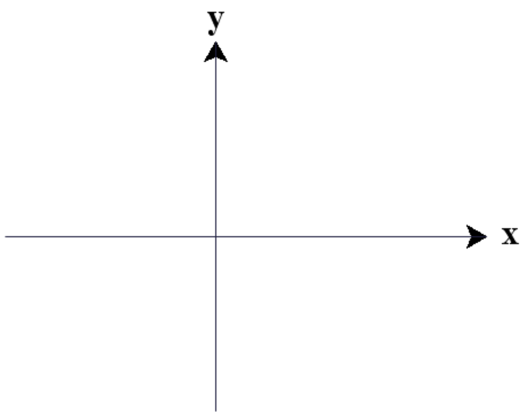
แบบฝึกหัดที่ ๑

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

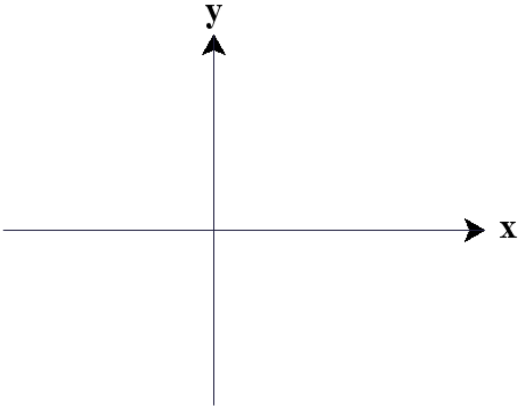
1) $y = 5^x$

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

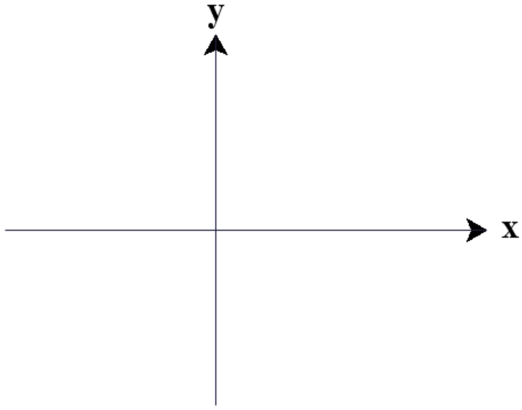




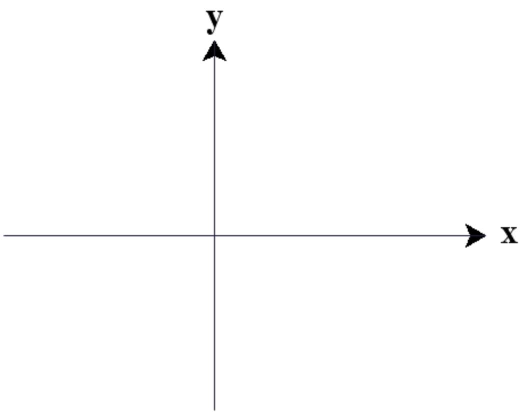
3) $y = 3^{-x}$



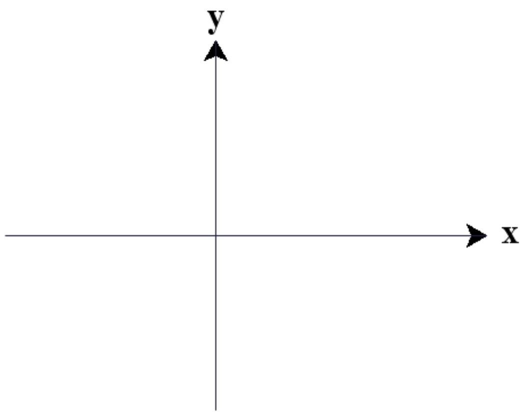
4) $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$



5) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$



6) $y = -\left(\frac{3}{4}\right)^x$



แบบฝึกหัดที่ ๒

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด

1) $y = 4^x$

2) $y = 5^{-x}$

3) $y = 7^x$

4) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

5) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

6) $y=\left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$

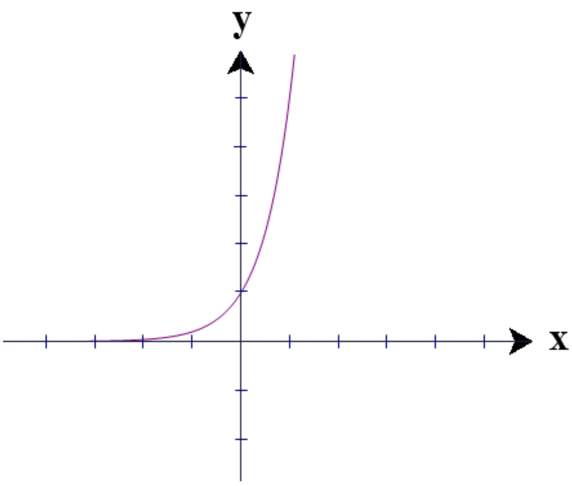
7) $y=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}$

8) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

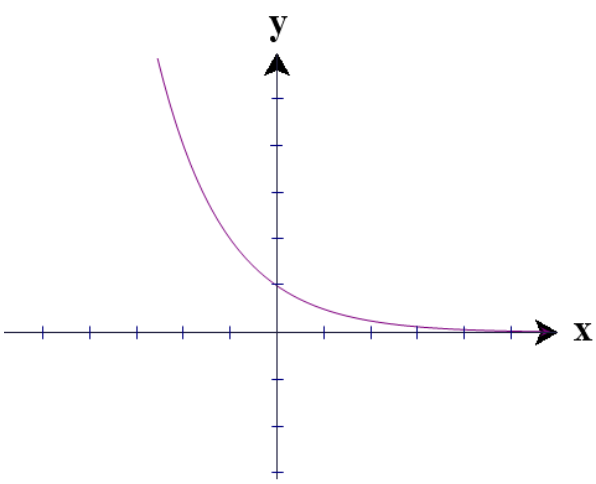
9) $y=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ ๑

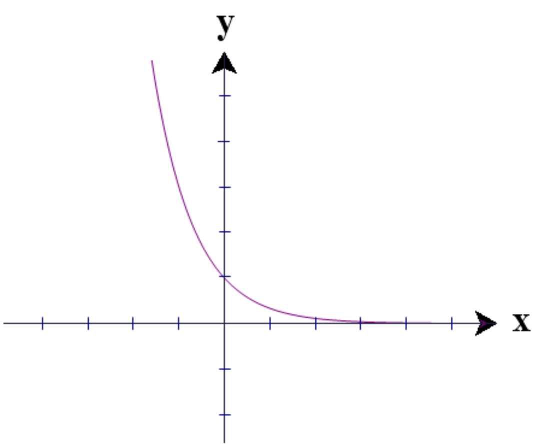
1) $y=5^x$



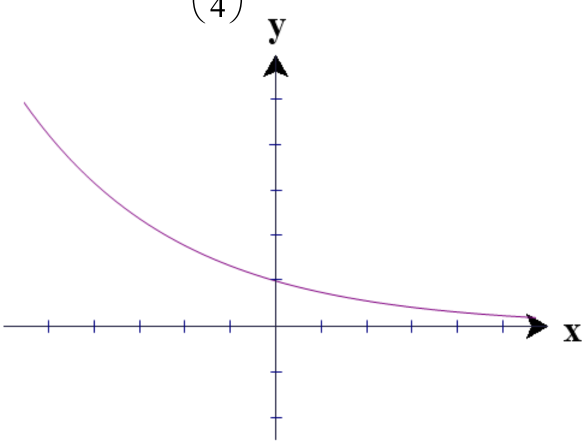
2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$



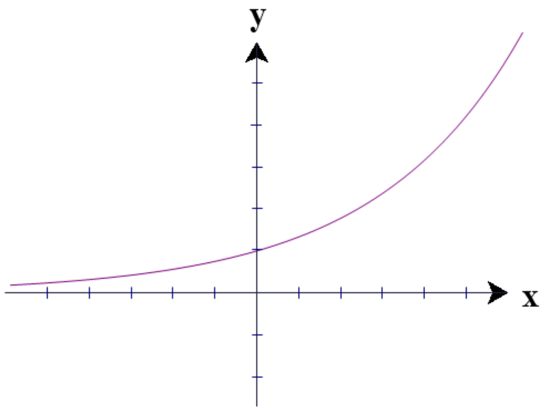
3) $y=3^{-x}$



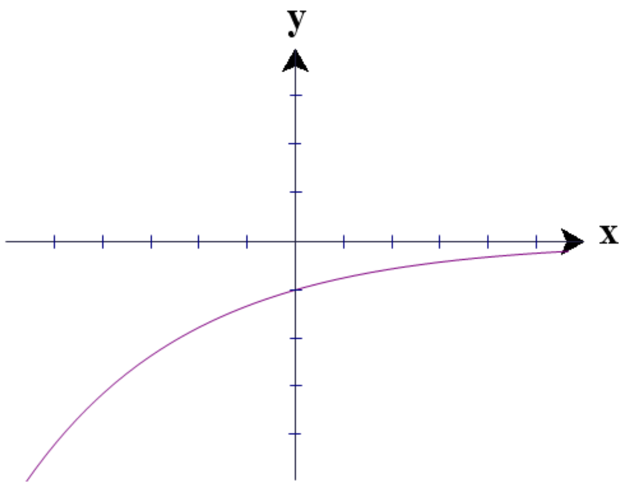
4) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^{x}$



5) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$



6) $y=-\left(\frac{3}{4}\right)^x$



เฉลยแบบฝึกหัดที่ ๒

1) เพิ่ม

2) ลด

3) เพิ่ม

4) ลด

5) เพิ่ม

6) เพิ่ม

7) ลด

8) ลด

9) ลด